Analyse fonctionnelle

Théorie des représentations du groupe quantique compact libre O(n)

Teodor Banica

Résumé - On trouve, pour chaque $n \geq 2$, la classe des $n \times n$ groupes quantiques compacts qui ont la théorie des représentations similaire a celle de $\mathbf{SU}(2)$*: c'est la classe des "analogues libres de* $\mathbf{O}(n)$*", définie par Wang et Van Daele.*

The representation theory of the free O(n) compact quantum group

Abstract - We find, for each $n \geq 2$, the class of $n \times n$ compact quantum groups having the representation theory similar to that of $\mathbf{SU}(2)$*: it is the class of "free analogues of* $\mathbf{O}(n)$*", defined by Wang and Van Daele.*

Rappelons la définition [6, 8] des groupes quantiques compacts matriciels: ce sont des paires (G, u) formées d'une $\mathbf{C}^*$-algèbre unifère G et d'une matrice $u \in M_n \otimes G$ telles que:

(i) les coefficients de u engendrent une $*$-algèbre G_s qui est dense dans G.

(ii) il existe un $\mathbf{C}^*$-morphisme $\delta : G \to G \otimes G$ tel que $(Id \otimes \delta)(u) = u_{12}u_{13}$.

(iii) les matrices u et $\overline{u}$ sont inversibles.

On appelle représentation de (G, u) toute matrice inversible $r \in M_k \otimes G_s$ telle que $(Id \otimes \delta)(r) = r_{12}r_{13}$. En [6], Woronowicz démontre que tout groupe quantique compact matriciel a une mesure de Haar et fait la théorie de "Peter-Weyl" pour ses représentations. On va utiliser librement les notations et résultats de [6].

Wang [5], puis Wang et Van Daele [3], ont défini des groupes quantiques compacts matriciels qui ont des proprietés d'universalité analogues a celles de $\mathbf{U}(n)$ et $\mathbf{O}(n)$:

Le cas "unitaire": Soit (G, u) un groupe quantique compact matriciel. Alors toute représentation de G est unitarisable. On peut donc supposer (modulo la similarité) que u et $F\overline{u}F^{-1}$ sont unitaires, pour une certaine matrice scalaire F.

On définit alors pour tous les $n \in \mathbf{N}$ et $F \in \mathbf{GL}(n)$ la $\mathbf{C}^*$-algèbre $A_u(F)$ avec des générateurs $\{u_{ij}\}_{1 \leq i,j \leq n}$ et les relations qui font unitaires les matrices u et $F\overline{u}F^{-1}$. On voit facilement que $(A_u(F), u)$ est un groupe quantique compact matriciel.

Le cas "orthogonal": Soit (G, u) avec u unitaire et supposons que $u \sim \overline{u}$ (comme représentations), donc qu'il existe une matrice scalaire F avec $u = F\overline{u}F^{-1}$. Remarquons que dans ce cas $\overline{u} = \overline{F}u\overline{F}^{-1}$, donc $u = (F\overline{F})u(F\overline{F})^{-1}$. Si u est irréductible, alors $F\overline{F} = c \in \mathbf{R}$ (car $F\overline{F} = c \in \mathbf{C} \Rightarrow \overline{F}F = \overline{c} \Rightarrow c \in \mathbf{R}$).

On définit alors pour tous les $n \in \mathbf{N}$ et $F \in \mathbf{GL}(n)$ avec $F\overline{F} = c \in \mathbf{R}$ la $\mathbf{C}^*$-algèbre $A_o(F)$ avec des générateurs $\{u_{ij}\}_{1 \leq i,j \leq n}$ et les relations données par $u = F\overline{u}F^{-1} =$ unitaire. On voit facilement que $(A_o(F), u)$ est un groupe quantique compact matriciel.

Remarque: On a $A_o\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = C(\mathbf{SU}(2))$. En fait, on voit facilement que $\mathbf{S}_\mu\mathbf{U}(2) = A_o\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -\mu^{-1} & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et tout $A_o(F)$ avec $F \in \mathbf{GL}(2)$ est similaire a un certain $\mathbf{S}_\mu\mathbf{U}(2)$ (voir [6]).

Ce lien entre $\mathbf{SU}(2)$ et les $\mathbf{C}^*$-algèbres $A_o(F)$ peut être etendu pour $n \geq 3$:

Théorème 1 *Soit $n \in \mathbf{N}$ et $F \in \mathbf{GL}(n)$ avec $F\overline{F} = c \in \mathbf{R}$. Alors les représentations irréductibles de $A_o(F)$ sont auto-adjointes et indexées par $\mathbf{N}$, avec $r_0 = 1$, $r_1 = u$ et*

$$r_k r_s = r_{|k-s|} + r_{|k-s|+2} + ... + r_{k+s-2} + r_{k+s}$$

(ie. les mêmes formules que pour les représentations de $\mathbf{SU}(2)$)

On commence par des considérations concernant la W^*-catégorie concrète complète monoïdale (voir [7]) $X(F)$ des représentations de $A_o(F)$. En termes de catégories monoïdales, la relation $u \sim \overline{u}$ se traduit par:

- le fait que $X(F)$ est la complétion de la sous-catégorie $Y(F)$ ayant comme objets $1, u, u^2, u^3, ...$

- l'existence d'un certain morphisme dans $Y(F)$, qui entrelace 1 et u^2.

Ces deux conditions sont suffisantes pour reconstruir $Y(F)$ (voir aussi la construction correspondante pour $\mathbf{S}_\mu\mathbf{U}(N)$ de [7]):

Proposition 1 *Soit $H = \mathbf{C}^n$, avec la base orthonormale $\{e_i\}$. Pour $r, s \in \mathbf{N}$, on définit les ensembles $Mor(r, s) \subset B(H^{\otimes r}, H^{\otimes s})$ des combinaisons linéaires de produits (composables) d'applications de la forme $Id_{H^{\otimes k}}$ ou $Id_{H^{\otimes k}} \otimes E \otimes Id_{H^{\otimes p}}$ ou $Id_{H^{\otimes k}} \otimes E^* \otimes Id_{H^{\otimes p}}$, ou $E \in Mor(0, 2)$ est l'application linéaire définie par $1 \mapsto \sum F_{ji} e_i \otimes e_j$. Alors ces ensembles $Mor(r, s)$ sont exactement les espaces d'opérateurs d'entrelacement $Mor(u^r, u^s) \subset B(H^{\otimes r}, H^{\otimes s})$.*

Démonstration: $Z(F) = \{\mathbf{N}, +, \{H^{\otimes r}\}_{r\in\mathbf{N}}, \{Mor(r,s)\}_{r,s\in\mathbf{N}}\}$ est clairement une W^*-catégorie concrète monoïdale engendrée par 1. Si on note $k : H \to H$ l'involution antilinéaire définie par $\lambda e_i \mapsto \overline{\lambda} e_i$ et $j = k\overline{F}$, alors $t_j, t_{j^{-1}} \in Mor(0,2)$, donc $1 = \overline{1}$ dans $Z(F)$ (voir [7], page 39). Par le théorème de dualité (Th. 1.3 de [7]), la paire universelle $Z(F)$-admissible est un groupe quantique compact matriciel, qui est défini par la même propriété universelle que $A_o(F)$, donc c'est $A_o(F)$. Il en résulte que $Y(F) = Z(F)$, donc $Mor(u^r, u^s) = Mor(r,s)$, $\forall\, r, s \geq 0$. $\square$

Lemme 1 $(E^* \otimes Id_H)(Id_H \otimes E) = cId_H$.

Démonstration: Résulte de la définition de E et de $F\overline{F} = c$. $\square$

On s'intéresse maintenant au commutant $Mor(k,k)$. Soient pour $s = 1, 2, ..., k-1$:

$$f_s = \| E(1) \|^{-2} Id_{H^{\otimes s-1}} \otimes EE^* \otimes Id_{H^{\otimes k-s-1}}$$

Un calcul facile montre à partir du lemme 1 que l'on a:
(i) $f_s^2 = f_s^* = f_s$, $\forall\, 1 \leq s \leq k-1$.
(ii) $f_s f_t = f_t f_s$, $\forall\, 1 \leq s, t \leq k-1$ avec $| s-t | \geq 2$.
(iii) $\beta f_s f_t f_s = f_s$, $\forall\, 1 \leq s, t \leq k-1$ avec $| s-t | = 1$ (avec $\beta = c^{-2} \| E(1) \|^4$).

Rappelons que l'algèbre de Temperley-Lieb $A_{\beta,k}$ est définie avec générateurs $1, f_1, ..., f_{k-1}$ et les relations (i) - (iii) (voir [2]) . Le point est de montrer que:

Proposition 2 *$1, f_1, ..., f_{k-1}$ engendrent $Mor(k,k)$ (comme $\mathbf{C}$-algèbre).*

Démonstration: On note $I(p) = Id_{H^{\otimes p}}$ et $V(p,q) = I(p) \otimes E \otimes I(q)$.

En utilisant le lemme, tout morphisme de $Y(F)$ est une combinaison linéaire d'applications de la forme $I(.)$ ou de la forme $V(.,.) \circ ... \circ V(.,.) \circ V(.,.)^* \circ ... \circ V(.,.)^*$. En particulier, les éléments de $Mor(k,k)$ sont des combinaisons linéaires de $I(k)$ et d'applications de la forme:

$$(*) \quad V(p_m, q_m) \circ ... \circ V(p_1, q_1) \circ V(r_1, s_1)^* \circ ... \circ V(r_m, s_m)^*$$

Soit U l'ensemble de morphismes de $Y(F)$ qui sont des combinaisons linéaires des $I(m)$ et des produits d'applications de la forme $U(m,q,p) := I(m) \otimes E \otimes I(q) \otimes E^* \otimes I(p)$ ou $U(m,q,p)^*$. On démontre par récurrence sur m que toute application de la forme (*) est dans U: supposons-le vrai pour

m et soit $A = V(p_{m+1}, q_{m+1}) \circ ... \circ V(p_1, q_1) \circ V(r_1, s_1)^* \circ ... \circ V(r_{m+1}, s_{m+1})^*$. Par la récurrence, $A = V(p_{m+1}, q_{m+1}) \circ T \circ V(r_{m+1}, s_{m+1})^*$ pour un certain $T \in U$.

Il est clair que tout produit de la forme $V(.,.) \circ U(.,.,.)^\sigma$ peut être écrit sous la forme $U(.,.,.)^\sigma \circ V(.,.)$ (ici $\sigma = 1$ ou $*$). Par une récurrence, tout produit de la forme $V(.,.) \circ T$ avec $T \in U$ peut être écrit comme une somme $\sum T_i \circ V(a_i, b_i)$, avec $T_i \in U$. Résulte que A est de la forme $\sum T_i \circ V(.,.) \circ V(.,.)^*$, avec $T_i \in U$. Mais tout produit de la forme $V(.,.) \circ V(.,.)^*$ est évidemment dans U, donc $A \in U$.

On a démontré que le commutant $Mor(k,k)$ est dans U, donc que c'est exactement l'ensemble des combinaisons linéaires de produits d'applications de la forme $I(k)$ ou $U(m,q,p)$ ou $U(m,q,p)^*$, avec $m+q+p = k-2$. Comme $f_1, ..., f_{k-1}$ sont self-adjoints, reste a prouver que $U(m,q,p)$ est dans l'algèbre engendrée par $1, f_1, ..., f_{k-1}$, pour tous $m+q+p = k-2$. Ce qui se fait en démontrant facilement (par récurrence sur q, en utilisant le lemme) la formule $c^q \parallel E(1) \parallel^{-2q-2} U(m,q,p) = f_{m+1} f_{m+2} ... f_{m+q} f_{m+q+1}$. $\square$

Corollaire 1 *$Mor(k,k)$ est un quotient de $A_{\beta,k}$.* $\square$

Remarque: En comptant les mots réduits de $A_{\beta,k}$ on trouve $dim(A_{\beta,k}) \leq C_k := (2k)!/(k!(k+1)!)$ (les nombres de Catalan; voir [2], Aside 4.1.4). Donc $dim(Mor(u^k, u^k)) = dim(Mor(k,k)) \leq dim(A_{\beta,k}) \leq C_k$ pour tout k. Dans le cas particulier $A_o\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = C(\mathbf{SU}(2))$ on a égalité partout. Ceci est bien connu, mais on va le démontrer par un argument utile dans la suite:

Notons v la représentation fondamentale de $C(\mathbf{SU}(2))$, f son caractère, et h la mesure de Haar sur $\mathbf{SU}(2)$. Alors la dernière formule du premier appendice de [6] dit que $h((f/2)^{2k}) = 2\pi^{-1} \int_{-1}^{1} x^{2k} \sqrt{1-x^2} dx$. De plus, $h((f/2)^{2k+1}) = 0$ pour tout k, ce qui signifie exactement que $f/2 \in (C(\mathbf{SU}(2)), h)$ est une variable semicirculaire dans le sens de Voiculescu ([4]).

Donc $dim(Mor((v^k, v^k)) = 4^k h((f/2)^{2k}) = 4^k \gamma_{0,1}(X^{2k})$, ou $\gamma_{0,1}$ est la loi semicirculaire. Enfin, on peut calculer les moments de $\gamma_{0,1}$ a l'aide de 3.3 et 3.4. de [4], de la formule des résidus et celle du binôme: $\gamma_{0,1}(X^{2k}) = (2k+1)^{-1}(2\pi i)^{-1} \int_T (z^{-1} + z/4)^{2k+1} = 4^{-k} C_k$.

Corollaire 2 *Soit u (resp. v) la représentation fondamentale de $A_o(F)$ (resp. $\mathbf{SU}(2)$). Alors $dim(Mor(u^k, u^k)) \leq dim(Mor(v^k, v^k))$.* $\square$

Démonstration du théorème: Soient $\{\chi_k\}_{k \in N}$ les caractères des représentations irréductibles de $\mathbf{SU}(2)$. L'espace linéaire (donc $\mathbf{C}$-algèbre)

$A \subset C(\mathbf{SU}(2))$ engendré par les χ_k est isomorphe a $\mathbf{C}[X]$, par $X \mapsto \chi_1$. Une récurrence facile sur k montre qu'il existent des entiers positifs $a(k,s)$ avec $a(k,k) = 1$ tels que $\chi_1^k = \sum_{s=0...k} a(k,s)\chi_s$.

Comme A est l'algèbre polynômiale sur χ_1, on peut définir le morphisme $\Psi : A \to A_o(F)$ par $\chi_1 \mapsto f_1$, ou f_1 est le caractère de la représentation fondamentale de $A_o(F)$. Les éléments $f_k = \Psi(\chi_k) \in A_o(F)$ vérifient $f_k f_s = f_{|k-s|} + f_{|k-s|+2} + ... + f_{k+s}$.

On démontre par récurrence sur k que f_k est le caractère d'une représentation irréductible r_k de $A_o(F)$, non-équivalente a $r_0 ... r_{k-1}$. Pour $k = 0, 1$ c'est trivial.

Supposons que c'est vrai pour $k - 1 \in \mathbf{N}$. Alors $f_{k-2}f_1 = f_{k-3} + f_{k-1}$ implique $r_{k-2}r_1 = r_{k-3} + r_{k-1}$, donc $r_{k-1} \subset r_{k-2}r_1$. En utilisant l'irréductibilité de r_{k-2} (par récurrence) et la formule de Frobenius, $r_{k-2} \subset r_{k-1}r_1$ donc il existe une représentation r_k de $A_o(F)$ telle que $r_{k-1}r_1 = r_{k-2} + r_k$. De plus, $f_{k-1}f_1 = f_{k-2} + f_k$, donc le caractère de r_k est f_k.

Comme Ψ est un morphisme d'algèbres, on a $f_1^k = \sum_{s=0...k} a(k,s) f_s$, donc $dim(Mor(u^k, u^k)) \geq \sum_{s=0...k} a(k,s)^2$ avec égalité ssi r_k est une représentation irréductible, non-équivalente a $r_0, ..., r_{k-1}$. Mais $\sum_{s=0...k} a(k,s)^2 = dim(Mor(v^k, v^k))$, donc par le corollaire 2, on a égalité.

Finalement, comme toute représentation irréductible de $A_o(F)$ apparaît dans une puissance tensorielle de u, et on a une formule pour décomposer u^k en sommes de r_s, on obtient que les r_s sont toutes les représentations irréductibles de $A_o(F)$. $\square$

Remarques: (i) Pour $n \geq 3$, on démontre par récurrence que $dim(r_k) = (x^{k+1} - y^{k+1})/(x - y)$, ou x, y sont les solutions de $X^2 - nX + 1 = 0$. Pour $n = 2$ on a $dim(r_k) = k + 1$.

(ii) La preuve du théorème montre que le commutant de u^k est $A_{\beta,k}$.

(iii) Le théorème 1 a la réciproque suivante, qui résulte immediatement de la définition de $A_o(F)$ et du théorème lui-même:

Théorème 2 *Si les représentations irréductibles d'un groupe quantique compact G sont auto-adjointes et indexées par $\mathbf{N}$, avec $r_0 = 1$ et $r_k r_s = r_{|k-s|} + r_{|k-s|+2} + ... + r_{k+s-2} + r_{k+s}$, alors G_{red} est similaire a un certain $A_o(F)_{red}$.* $\square$

Je tiens à remercier G. Skandalis, mon directeur de thèse, et E. Blanchard, pour de nombreuses discussions sur le sujet.

References

[1] P. de la Harpe, G. Skandalis - Powers' property and simple C^*-algebras, Math. Ann. 273, 241-250 (1986)

[2] V.F.R. Jones - Index for subfactors, Inv. Math. 72, 1-25 (1983)

[3] A. Van Daele, S.Z. Wang - Universal quantum groups, preprint (1994)

[4] D. Voiculescu, K. Dykema, A. Nica - Free random variables, CRM Monograph Series $n°1$, AMS (1993)

[5] S.Z. Wang - Free products of compact quantum groups, Comm. Math. Phys. 167, 671-692 (1995)

[6] S.L. Woronowicz - Compact matrix pseudogroups, Comm. Math. Phys. 111, 613-665 (1987)

[7] S.L. Woronowicz - Tannaka-Krein duality for compact matrix pseudogroups. Twisted $SU(n)$ groups, Inv. Math. 93, 35-76 (1988)

[8] S.L. Woronowicz - A remark on compact matrix quantum groups, Lett. Math. Phys. 21, 35-39 (1991)

Univ. Paris 7, Aile 45-55, 5^e *étage, 2 place Jussieu, 75005 Paris*