Le groupe quantique compact libre U(n)

Teodor Banica

Algèbres d'opérateurs et représentations - URA 747 du CNRS, Université de Paris Jussieu, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
Present adress: Institut de Mathématiques de Luminy, case 930, F-13288 Marseille Cedex 9, France
E-mail: banica@iml.univ-mrs.fr

The free unitary compact quantum group

Abstract: The free analogues of $\mathbf{U}(n)$ in Woronowicz' theory [Wo2] are the compact matrix quantum groups $\{A_u(F) \mid F \in \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})\}$ introduced by Wang and Van Daele. We classify here their irreducible representations. Their fusion rules turn to be related to the combinatorics of Voiculescu's circular variable. If $F\overline{F} \in \mathbf{R}I_n$ we find an embedding $A_u(F)_{red} \hookrightarrow C(\mathbf{T}) *_{red} A_o(F)$, where $A_o(F)$ is the deformation of $\mathbf{SU}(2)$ studied in [B2]. We use the representation theory and Powers' method for showing that the reduced algebras $A_u(F)_{red}$ are simple, with at most one trace.

Introduction

L'une des constructions de base de l'analyse harmonique est la dualité de Pontryagin : elle associe à un groupe abélien le groupe abélien de ses caractères et permet d'étudier cette correspondance auto-duale. Cette dualité a été étendue aux groupes non-commutatifs, mais l'objet dual (l'algèbre de convolution du groupe) n'est plus de même nature. Afin d'obtenir un cadre généralisant à la fois les groupes et leur objets duaux, on est amené à définir de nouveaux objets dans la catégorie des algèbres de Hopf qu'on appelle des "groupes quantiques".

Un certain nombre de familles d'exemples ont été étudiées au niveau des algèbres d'opérateurs. Ainsi, Woronowicz [Wo2] a défini en 1987 la classe des "groupes quantiques compacts matriciels" : un groupe quantique compact matriciel est une paire (G, u) formée d'une $\mathbf{C}^*$-algèbre unifère G et d'une matrice $u \in M_n(G)$ telle que :
(a) les coefficients $\{u_{ij}\}$ de u engendrent une $*$-algèbre G_s dense dans G.

(b) il existe un $\mathbf{C}^*$-morphisme $\delta : G \to G \otimes_{min} G$ qui envoie $u_{ij} \mapsto \sum u_{ik} \otimes u_{kj}$.
(c) il existe une application linéaire antimultiplicative $\kappa : G_s \to G_s$ telle que $\kappa(\kappa(a^*)^*) = a$ pour tout $a \in G_s$ et telle que $(Id \otimes \kappa)(u) = u^{-1}$.

Cette définition recouvre également le cas "quantique compact" (obtenu par des limites projectives) et le cas "quantique discret" (par dualité). Le cas "quantique localement compact" a été traité dans un cadre général par Baaj et Skandalis [BS].

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, la $\mathbf{C}^*$-algèbre universelle $A_u(I_n)$ engendrée par les coefficients d'une matrice $n \times n$ unitaire, telle que sa transposée soit aussi unitaire, est un groupe quantique compact matriciel [W1, W2, VDW]. $A_u(I_n)$ est un analogue de $\mathbf{U}(n)$ dans la théorie de Woronowicz. Cette algèbre, ainsi que ses versions "déformées" $\{A_u(F) \mid F \in \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})\}$ constitue l'objet d'étude de ce papier.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse, G. Skandalis. Je voudrais aussi remercier E. Blanchard pour de nombreuses discussions sur les C^*-algèbres de Hopf, ainsi que S.Z. Wang pour plusieurs commentaires utiles sur ce papier.

1 Définitions et énoncés des résultats

Dans cette section on définit les groupes quantiques compacts matriciels $A_u(F)$ (d'une manière légérement différente que dans l'article de Wang et Van Daele [VDW]) et on énonce les resultats principaux. La fin de cette section contient le plan de l'article, ainsi que des rappels et notations.

1) Il existe plusieures définitions pour les morphismes entre les groupes quantiques compacts matriciels, auxquelles correspondent des différentes notions d'isomorphisme. Sans rentrer dans les détails (dans ce papier on dira que $(G, u) = (H, v)$ si $G = H$ en tant que $\mathbf{C}^*$-algèbres et si $u = v$), rappelons la définition [Wo2] de la similarité :

Deux groupes quantiques compacts matriciels (G, u) et (H, v) avec $u \in M_n(G), v \in M_m(H)$ sont dits similaires (on écrira $G \sim_{sim} H$) si $n = m$ et s'il existe une matrice $Q \in \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$ et un C^*-isomorphisme $f : G \to H$ tel que $(Id \otimes f)(u) = QvQ^{-1}$.

2) Soit (G, u) un groupe quantique compact matriciel. On appelle *représentation* de (G, u) toute matrice inversible $r \in M_k(G)$ telle que

$$(Id \otimes \delta)(r) = r_{12}r_{13} := \sum e_{ij} \otimes r_{ik} \otimes r_{kj}$$

La théorie de "Peter-Weyl" de Woronowicz [Wo2] montre que toute représentation est équivalente à une représentation unitaire. En particulier, $v = Q^{-1}uQ$ est unitaire pour une certaine matrice $Q \in \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$. Quitte à remplacer (G, u) par un groupe quantique compact matriciel similaire, on peut supposer que u est unitaire.

3) Soit (G, u) un groupe quantique compact matriciel avec $u \in M_n(G)$ unitaire. Alors la représentation $\overline{u} := (u_{ij}^*)$ est équivalente à une représentation unitaire, donc il existe une matrice $F \in \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$ telle que $F\overline{u}F^{-1}$ soit unitaire. Il en résulte que G est un quotient de la $\mathbf{C}^*$-algèbre $A_u(F)$, où :

Définition 1 *Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et toute matrice $F \in \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$ on définit la $\mathbf{C}^*$-algèbre $A_u(F)$ avec générateurs $\{u_{ij}\}_{1 \leq i,j \leq n}$ et les relations qui rendent unitaires les matrices $u = (u_{ij})$ et $F\overline{u}F^{-1}$.*

Remarquons que $A_u(F)$ est bien définie : si J est l'idéal bilatère engendré dans l'algèbre libre sur $2n^2$ variables $L := \mathbf{C} < u_{ij}, u_{ij}^* >$ par les relations qui rendent unitaires les matrices $u := (u_{ij})$ et $F\overline{u}F^{-1} := F(u_{ij}^*)F^{-1}$, alors les images des générateurs u_{ij}, u_{ij}^* dans le quotient L/J sont de norme ≤ 1 pour toute $\mathbf{C}^*$-norme sur L/J. Donc L/J admet une $\mathbf{C}^*$-algèbre enveloppante, qu'on peut noter $A_u(F)$.

$(A_u(F), u)$ est un groupe quantique compact matriciel. En effet, on a v unitaire $\Longrightarrow v_{12}v_{13}$ unitaire, ce qui appliqué à $v = u$ et à $v = F\overline{u}F^{-1}$ (avec la remarque que $F\overline{u_{12}u_{13}}F^{-1} = (F\overline{u}F^{-1})_{12}(F\overline{u}F^{-1})_{13}$) permet de définir δ par propriété universelle. Enfin, par [Wo4] l'existence de l'antipode κ est équivalente au fait que $u, \overline{u}$ soient inversibles, ce qui est évident dans le cas de $A_u(F)$.

Remarquons que pour tout groupe compact $G \subset \mathbf{U}(n)$, $C(G)$ est un quotient de $C(\mathbf{U}(n))$. Par ce qui précède, l'analogue de $\mathbf{U}(n)$ parmi les groupes quantiques compacts est *la famille* $\{A_u(F) \mid F \in \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})\}$.

Remarque. Les relations qui définissent $A_u(F)$ sont :

$$uu^* = u^*u = (F^*F)\overline{u}(F^*F)^{-1}u^t = u^t(F^*F)\overline{u}(F^*F)^{-1} = I.$$

On en déduit des égalités entre les $A_u(F)$:

$$A_u(F) = A_u(\sqrt{F^*F}) = A_u(\lambda F),\ \forall\, F \in \mathbf{GL}(n, \mathbf{C}),\ \lambda \in \mathbf{C}^*.$$

Il existent aussi d'autres similarités entre les $A_u(F)$ - si $V, W \in \mathbf{U}(n)$ et $F \in \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$ alors $A_u(F) \sim_{sim} A_u(VFW)$ (voir la Proposition 6). On pourrait donc utiliser d'autres paramètres pour les $A_u(F)$ - par exemple F^*F, ou $\sqrt{F^*F}$, ou encore la liste des valeurs propres de $\sqrt{F^*F}$ etc., voir [W2, VDW]. Bien-sûr, le choix du paramètre n'est pas un problème sérieux : on obtient toujours les mêmes objets, au moins modulo la similarité.

Le quotient de $A_u(F)$ par les relations $u = F\overline{u}F^{-1}$ pourrait être considéré comme étant une "version orthogonale de $A_u(F)$". Remarquons que la condition $u = F\overline{u}F^{-1}$ implique $\overline{u} = \overline{F}u\overline{F}^{-1}$, donc $u = (F\overline{F})u(F\overline{F})^{-1}$.

Il en résulte que si $F\overline{F}$ n'est pas un multiple scalaire de l'identité de $M_n(\mathbf{C})$, alors u est réductible dans ce quotient.

Remarquons également que $F\overline{F} = cI_n$ avec $c \in \mathbf{C}$ implique $\overline{F}F = \overline{c}I_n$, donc $c = \overline{c}$.

Définition 2 *Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et pour toute matrice $F \in \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$ telle que $F\overline{F} = cI_n$ avec $c \in \mathbf{R}$ on note $A_o(F)$ le quotient de $A_u(F)$ par les relations $u = F\overline{u}F^{-1}$.*

Les représentations irréductibles de $A_o(F)$ sont indéxées par $\mathbf{N}$, et leur formules de fusion sont exactement les formules connues pour les représentations de $\mathbf{SU}(2)$ ([B2], voir le Théorème 4 ci-dessous).

Notations. $\mathbf{N} * \mathbf{N}$ est le coproduit dans la catégorie des monoïdes de deux copies de $\mathbf{N}$ ayant α, β comme générateurs ; e est l'élément neutre de $\mathbf{N} * \mathbf{N}$; $-$ est l'involution antimultiplicative de $\mathbf{N} * \mathbf{N}$ définie par $\overline{e} = e$, $\overline{\alpha} = \beta$ et $\overline{\beta} = \alpha$.

Le résultat principal de ce papier est le suivant :

Théorème 1 *Soit $n \in \mathbf{N}$ et $F \in \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$. Alors :*

(i) Les représentations irréductibles de $(A_u(F), u)$ sont indexées par $\mathbf{N} * \mathbf{N}$, avec $r_e = 1, r_\alpha = u, r_\beta = \overline{u}$. Pour tous les $x, y \in \mathbf{N} * \mathbf{N}$ on a les formules $r_{\overline{x}} = \overline{r_x}$ et :

$$r_x \otimes r_y = \sum_{\{a,b,g \in N*N \mid x = ag,\, y = \overline{g}b\}} r_{ab}.$$

(ii) La sous-algèbre de $A_u(F)$ engendrée par les caractères de toutes les représentations est la $*$-algèbre libre sur le caractère $\chi(u)$ de la représentation fondamentale.

(iii) $\chi(u)/2$ est une variable circulaire dans $A_u(F)$, munie de la mesure de Haar.

(iv) Si $F\overline{F} \in \mathbf{R}I_n$ alors $A_u(F)_{red}$ se plonge dans $C(\mathbf{T}) *_{red} A_o(F)$ par $u_{ij} \mapsto zv_{ij}$ (où v est la représentation fondamentale de $A_o(F)$ et z est le générateur canonique de $C(\mathbf{T})$).

Le point (i) montre que la famille $\mathcal{F} = \{A_u(F) \mid n \in \mathbf{N}, F \in \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})\}$ a la propriété remarquable suivante :

Si $G, H \in \mathcal{F}$ alors il existe une bijection ψ entre les classes d'équivalence de représentations de G et celles de H qui préserve les sommes et les produits tensoriels et qui envoie l'ensemble des représentations irréductibles de G sur l'ensemble des représentations irréductibles de H, ainsi que la représentation fondamentale de G sur celle de H.

Un résultat important de ce type, pour la famille (à un paramètre réel positif) de groupes quantiques compacts matriciels associés à une algèbre de Lie classique, a été démontré par Rosso [R1, R2]. Un autre résultat dans cette direction, mais cette fois-ci de "rigidité", est celui de [B2] - la famille

$$\{A_o(F) \mid n \in \mathbf{N}, F \in \mathbf{GL}(n, \mathbf{C}), F\overline{F} \in \mathbf{R}I_n\}$$

vérifie la propriété ci-dessus, mais de plus est *maximale*. Le résultat suivant est du même type :

Théorème 2 *Si les représentations irréductibles d'un groupe quantique compact matriciel (G, u) sont indexées par $\mathbf{N} * \mathbf{N}$, avec $r_e = 1$, $r_\alpha = u$, $r_\beta = \overline{u}$ et $r_x \otimes r_y = \sum_{x=ag, y=\overline{g}b} r_{ab}$, alors il existe un $n \in \mathbf{N}$ et une matrice $F \in \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$ tels que et $G_p \sim_{sim} A_u(F)$.*

La théorie des représentations de $A_u(F)$ fait l'objet de la première partie (sections $2, 3, 4$) de ce papier. Dans la deuxième partie (sections $6, 7, 8$) on utilise la théorie des représentations pour résoudre certaines questions topologiques liées aux $\mathbf{C}^*$-algèbres $A_u(F)$ et $A_u(F)_{red}$.

Rappelons que pour un groupe quantique compact matriciel (G, u) la mesure de Haar h n'est pas forcément une trace, mais elle vérifie la formule

$$h(xy) = h(y(f_1 * x * f_1)), \ \forall\, x, y \in G_s$$

où $*$ est la convolution au dessus de G_s et $\{f_z\}_{z\in\mathbf{C}}$ est une famille canonique de caractères de G_s (voir le Théorème 5.6 de [Wo2]).

Théorème 3 *Soit $n \in \mathbf{N}$ et $F \in \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$. Alors $A_u(F)_{red}$ est simple.*

Soient $s, t \in \mathbf{R}$ et soit ψ un état de $A_u(F)_{red}$ tel que $\forall\, x, y \in A_u(F)_s$ on ait $\psi(xy) = \psi(y(f_s * x * f_t))$. Alors ψ est la mesure de Haar de $A_u(F)_{red}$.

En particulier, si F est un multiple scalaire d'une matrice unitaire, alors $A_u(F)_{red}$ est simple à trace unique ; sinon, $A_u(F)_{red}$ est simple sans trace.

Parmi les autres résultats sur $A_o(F)$ et $A_u(F)$, citons :
- un résultat de commutation dans $A_u(I_2)$.
- l'égalité de facteurs $A_u(I_2)_{red}'' = W^*(\mathbf{F}_2)$.
- la non-moyennabilité de $A_o(F)$ et $A_u(F)$.
- la non-nucléarité de $A_o(I_n)_{red}$ et $A_u(I_n)_{red}$.
- des remarques sur les mesures de Haar de $A_o(F)$ et $A_u(F)$.

Une partie de ces résultats sont des cas particuliers d'énoncés plus généraux sur les groupes quantiques compacts. Citons ici le résultat de simplicité (la Proposition 9), dont la démonstration pour $G = \mathbf{C}^*_{red}(\mathbf{F}_n)$ contient une simplification par rapport aux démonstrations classiques [P, H, HS] de la simplicité de $\mathbf{C}^*_{red}(\mathbf{F}_n)$.

L'organisation de ce travail est la suivante :

2^{eme} section : on rappelle les résultats de [B2] sur $A_o(F)$ et on donne une description (en termes de certaines partitions non-croisées) de l'espace des vecteurs fixes de la représentation $u^{\otimes k}$ de $A_o(F)$.

3^{eme} section : on construit l'algèbre abstraite A engendrée par des $\{r_x \mid x \in \mathbf{N} * \mathbf{N}\}$ qui se multiplient par les formules $r_x r_y = \sum_{x=ag, y=\overline{g}b} r_{ab}$ et on montre que $A \simeq C < X, X^* >$. En utilisant cette algèbre, ainsi que la même methode que dans le cas "orthogonal" [B2], on voit que la démonstration du théorème 1 est équivalente au calcul des dimensions des commutants des représentations de la forme

$$u^{\otimes m_1} \otimes \overline{u}^{\otimes n_1} \otimes u^{\otimes m_2} \otimes \overline{u}^{\otimes n_2} \otimes ... \qquad (\star)$$

Ces dimensions sont des $*$-moments du caractère $\chi(u)$ de la représentation fondamentale de $A_u(F)$ par rapport à la mesure de Haar, et en fait on voit que $\chi(u)/2$ doit être une *variable circulaire*.

4^{eme} section : si $F\overline{F} \in \mathbf{R}I_n$ on combine les résultats sur $A_o(F)$ avec un résultat de probabilités non commutatives pour demontrer le théorème 1. On utilise ensuite des résultats de reconstruction de [Wo3] pour trouver un système de générateurs des espaces des vecteurs fixes des représentations de la forme $(\star)$. Les dimensions de ces espaces sont exactement les $*$-moments de $\chi(u)$, et en utilisant cette remarque on passe du cas $F\overline{F} \in \mathbf{R}I_n$ au cas général $F \in \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$.

5^{eme} section : on decrit les $A_o(F)$ et $A_u(F)$ pour $F \in \mathbf{GL}(2, \mathbf{C})$. Le point (iv) du théorème 1 permet d'identifier $A_u(I_2)_{red}$ comme une sous-$\mathbf{C}^*$-algèbre de $C(\mathbf{T}) *_{red} C(\mathbf{SU}(2))$, et on en déduit deux plongements (de $\mathbf{C}^*$-algèbres de Hopf) de $C(\mathbf{SO}(3))$ dans $A_u(I_2)$, ainsi que l'égalité de facteurs $A_u(I_2)''_{red} = W^*(\mathbf{F}_2)$.

6^{eme} section : on utilise les caractères $\{f_z\}$ de [Wo2] pour "perturber" la représentation adjointe d'un groupe quantique compact matriciel.

7^{eme} section : on généralise aux groupes quantiques compacts la "Propriété de Powers" de de la Harpe [H], ainsi que la démonstration de simplicité de [HS]. L'idée est de remplacer les automorphismes intérieurs $x \mapsto u_g x u_g^*$ du cas discret par les applications complètement positives de la forme $x \mapsto ad(r)(x)$, avec $r \in \widehat{A}$.

8^{eme} section : $A_u(F)_{red}$ n'a pas la propriété de Powers, mais en utilisant les calculs de la 6^{eme} et 7^{eme} section on arrive à démontrer le théorème 3.

Rappels et Notations :

A) matrices : on note $\{e_1, ..., e_n\}$ la base canonique de $\mathbf{C}^n$, et e_{ij} le système d'unités matricielles de $M_n(\mathbf{C})$, qui vérifie $e_{ij} : e_j \mapsto e_i$. Si A est une $*$-algèbre et $u \in M_n(A)$, $u = \sum e_{ij} \otimes u_{ij}$, on note $\overline{u} = \sum e_{ij} \otimes u_{ij}^*$, $u^t = \sum e_{ij} \otimes u_{ji}$, $u^* = \sum e_{ij} \otimes u_{ji}^*$.

B) représentations : pour tout groupe quantique compact G on note $Rep(G)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires de G et $\widehat{G} \subset Rep(G)$ l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles.

Si $u = \sum e_{ij} \otimes u_{ij} \in M_n(G)$ et $v = \sum e_{ij} \otimes v_{ij} \in M_m(G)$ sont des représentations, on note $u \otimes v$ la matrice $u_{13}v_{23} := \sum e_{ij} \otimes e_{kl} \otimes u_{ij}v_{kl}$, et $u + v$ la matrice $diag(u, v)$. Alors $u \otimes v$ et $u + v$ sont des représentations. L'application $(u, v) \mapsto u \otimes v$ induit une structure de monoïde sur $Rep(G)$. De même pour l'application $(u, v) \mapsto u + v$

Le caractère de u est $\chi(u) := \sum u_{ii} \in G$. On a $\chi(u + v) = \chi(u) + \chi(v)$ et

$\chi(u \otimes v) = \chi(u)\chi(v)$. (voir [Wo2, Wo3]).

C) théorie de "Peter-Weyl" de Woronowicz : on note $G_{central}$ l'espace linéaire (donc $*$-algèbre) engendré dans la $*$-algèbre "des coefficients" G_s par les caractères de toutes les représentations. On utilisera souvent, sans référence, le résultat fondamental suivant (Th. 5.8 de [Wo2]) :

La mesure de Haar est une trace sur $G_{central}$. L'ensemble $\{\chi(u) \mid u \in \widehat{G}\}$ est une base de $G_{central}$, orthonormée par rapport au produit scalaire associé à la mesure de Haar.

D) version pleine et réduite : la version réduite d'un groupe quantique compact matriciel (G, u) est $G_{red} = G/\{x \mid h(xx^*) = 0\}$ (h étant la mesure de Haar de G). La version pleine est $G_p = C^*(G_s)$ (la $\mathbf{C}^*$-algèbre enveloppante de G_s). Alors G_p et G_{red} sont des groupes quantiques compacts matriciels (cf. [Wo2, BS]). G est dit moyennable si la projection $G_p \to G_{red}$ est un isomorphisme. Il est dit plein (resp. réduit) si la projection $G_p \to G$ (resp. $G \to G_{red}$) est un isomorphisme. On a $G_s = H_s \Longleftrightarrow G_{red} = H_{red} \Longleftrightarrow G_p = H_p$. Notons aussi que $A_o(F)$ et $A_u(F)$ sont pleins.

E) liberté : si (A, ϕ) est une $*$-algèbre unifère munie d'une forme linéaire unitale, une famille de sous-algèbres $1 \in A_i \subset A$ ($i \in I$) est dite libre si $a_j \in A_j \cap ker(\phi)$ avec $i_j \neq i_{j+1}$, $1 \leq j \leq n-1$ implique $a_1 a_2 ... a_n \in ker(\phi)$ (voir [VDN]). Deux éléments $a, b \in A$ sont dits $*$-libres si les deux $*$-algèbres unifères qu'ils engendrent dans A sont libres. Exemple fondamental : soient (A, ϕ) et (B, ψ) deux $\mathbf{C}^*$-algèbres unifères munies d'états et $A * B$ le produit libre (= coproduit dans la catégorie des $\mathbf{C}^*$-algèbres unifères) de A et B. Si on note $\phi * \psi$ le produit libre de ϕ et ψ et $\pi_{\phi*\psi}$ la représentation GNS associée, alors $\pi_{\phi*\psi}(A)$ et $\pi_{\phi*\psi}(B)$ sont libres dans $\pi_{\phi*\psi}(A * B)$ (voir [A, VDN]).

F) produits libres : si (G, u) et (H, v) sont deux groupes quantiques compacts alors $(G * H, diag(u, v))$ est un groupe quantique compact matriciel plein, et sa mesure de Haar est le produit libre $h * k$ des mesures de Haar h de G et k de H (voir [W2]). Le produit libre réduit $\pi_{h*k}(G * H)$ sera noté $G *_{red} H$; c'est un groupe quantique compact matriciel réduit. Notons que h, k étant fidèles sur G_{red}, H_{red} respectivement, on a des plongements canoniques de G_{red} et H_{red} dans $G *_{red} H$.

G) $*$-distribution : pour tout élément $a \in (M, \phi)$ d'une $*$-algèbre munie d'une forme linéaire, sa $*$-distribution est la fonctionnelle sur $\mathbf{C} < X, X^* >$ donnée par $P \mapsto \phi(P(a, a^*))$, i.e. la composée :

$$\mathbf{C} < X, X^* > \stackrel{X \mapsto a}{\longrightarrow} M \stackrel{\phi}{\longrightarrow} \mathbf{C}.$$

Les $*$-moments de a sont les valeurs de μ_a sur les monomes non-commutatifs en X, X^*, i.e. sur le monoïde engendré dans $(\mathbf{C} < X, X^* >, \cdot)$ par X et X^*.

Si (M, ϕ) est une $\mathbf{C}^*$-algèbre munie d'un état fidèle et $a = a^*$, alors la $*$-distribution μ_a peut être vue (par restriction à $\mathbf{C}[X]$, ensuite en complètant) comme une mesure de probabilité sur le spectre de a.

H) variables circulaires : la loi semicirculaire (centrée) est la mesure $\gamma_{0,1} = 2/\pi\sqrt{1-t^2}dt$ sur $[-1, 1]$. Tout hermitien ayant cette distribution est dit semicirculaire. Un quart-circulaire est un élément positif ayant comme distribution la mesure $4/\pi\sqrt{1-t^2}dt$ sur $[0, 1]$. Un Haar-unitaire est un unitaire u tel que $\mu_u(X^k) = 0$ pour tout $k \neq 0$. Une variable g est dite circulaire si $2^{-1/2}(g + g^*)$ et $-i2^{-1/2}(g - g^*)$ sont semicirculaires et libres (voir [VDN]).

2 Compléments sur $A_o(F)$

On voit facilement à partir de la définition de $A_o(F)$ que $A_o\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = C(\mathbf{SU}(2))$, et même plus, qu'on a une égalité (modulo la similarité)

$$\{A_o(F) \mid F \in \mathbf{GL}(2, \mathbf{C}), F\overline{F} \in \mathbf{R}I_2\} = \{\mathbf{S}_\mu\mathbf{U}(2) \mid \mu \in [-1, 1] - \{0\}\}$$

où $\mathbf{S}_\mu\mathbf{U}(2)$ sont les déformations de $\mathbf{S}_1\mathbf{U}(2) := C(\mathbf{SU}(2))$ définies par Woronowicz dans [Wo1, Wo2] (voir 5^{eme} section). Si $F \in \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$ avec n arbitraire on a le résultat suivant.

Théorème 4 *[B2] Soit $n \in \mathbf{N}$ et $F \in \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$ avec $F\overline{F} \in \mathbf{R}I_n$. Alors les représentations irréductibles de $A_o(F)$ sont auto-adjointes et indexées par $\mathbf{N}$, avec $r_0 = 1$, $r_1 = u$ et*

$$r_k \otimes r_s = r_{|k-s|} + r_{|k-s|+2} + \ldots + r_{k+s-2} + r_{k+s}$$

(i.e. les mêmes formules que pour les représentations de $\mathbf{SU}(2)$).

Rappelons brièvement la démonstration : la condition $F\overline{F} \in \mathbf{R}I_n$ montre que la projection sur $\mathbf{C}\sum F_{ji}e_i \otimes e_j$, qui entrelace $u^{\otimes 2}$, définit pour tout k une représentation de l'algèbre de Jones $A_{\beta,k}$ dans $Mor(u^{\otimes k}, u^{\otimes k})$. En utilisant les résultats de [Wo3] on voit que cette représentation est surjective, et l'inégalité $dim(Mor(u^{\otimes k}, u^{\otimes k})) \leq dim(A_{\beta,k}) \leq C_k$ ainsi obtenue permet de construire (par récurrence sur k) des représentations irréductibles r_k de $A_o(F)$ qui vérifient les mêmes formules de multiplication que celles de $\mathbf{SU}(2)$.

Un corollaire de la démonstration (voir Remarque (ii) de [B2]) est l'égalité

$$dim(Mor(u^{\otimes k}, u^{\otimes k})) = dim(A_{\beta,k}) = C_k = \frac{(2k)!}{k!(k+1)!}.$$

Notons h la mesure de Haar de $A_o(F)$. On a (cf. Rappel C) :

$$dim(Mor(u^{\otimes k}, u^{\otimes k})) = h(\chi(u)^{\otimes 2k}) = dim(Mor(1, u^{\otimes 2k})).$$

Les nombres de Catalan C_k ont une autre propriété remarquable - ce sont les moments de la loi semicirculaire de Wigner et Voiculescu. En effet, on peut calculer les moments de $\gamma_{0,1}$ a l'aide de 3.3 et 3.4. de [VDN], de la formule des résidus et celle du binôme:

$$\gamma_{0,1}(X^{2k}) = (2k+1)^{-1}(2\pi i)^{-1}\int_T (z^{-1} + z/4)^{2k+1} = 4^{-k}\frac{(2k)!}{k!(k+1)!}.$$

En combinant toutes ces égalités, on en déduit que :

Proposition 1 $\chi(u)/2 \in (A_o(F), h)$ *est une variable semicirculaire.* $\Box$

Remarque. Si $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, alors la caractère de la représentation fondamentale $u = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ de $A_o(F) = C(\mathbf{SU}(2))$ est $\chi(u) = 2Re(a)$. Le fait que $Re(a)$ soit semicirculaire par rapport à la mesure de Haar de $\mathbf{SU}(2)$ peut être vu géometriquement, en identifiant $\mathbf{SU}(2)$ avec la sphère $\mathbf{S}^3$, et sa mesure de Haar avec la mesure uniforme sur cette sphère.

Corollaire 1 *(G. Skandalis) Si $F \in \mathbf{GL}(2, \mathbf{C})$ alors $A_o(F)$ est moyennable. Si $F \in \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$ et $n > 2$ alors $A_o(F)$ n'est pas moyennable.*

Démonstration. Le support de la loi semicirculaire étant $[-1, 1]$ et h étant fidèle sur $A_o(F)_{red}$, on obtient que $Sp(\chi(u)/2) = [-1, 1]$ dans $A_o(F)_{red}$ (voir Rappels). Donc si $n \geq 3$, alors $n - \chi(u)$ est inversible dans $A_o(F)_{red}$. Mais la coünité de $A_o(F)$ est un $*$-morphisme unital qui envoie $n - \chi(u)$ sur 0, donc $A_o(F) \neq A_o(F)_{red}$.

Enfin, si $F \in \mathbf{GL}(2, \mathbf{C})$, alors $A_o(F)$ est similaire à un certain $\mathbf{S}_\mu \mathbf{U}(2)$ (voir 5^{eme} section), qui est moyennable, cf. [N, Bl]. $\square$

Remarque. Une partie des résultats classiques sur la moyennabilité a été étendue aux groupes quantiques localements compacts dans [BS, Bl] (voir aussi la Proposition 10 ci-dessous). La démonstration ci-dessus de la non-moyennabilité de $A_o(F)$ peut être étendue à des groupes quantiques compacts matriciels quelconques - on démontre par la même méthode que (G, u) avec $u \in M_n(G)$ est moyennable si et seulement si le support de la loi de $Re(\chi(u))$ par rapport à la mesure de Haar contient n.

Rappelons que pour toute représentation $r \in B(H_r) \otimes G$ d'un groupe quantique compact G, les vecteurs fixes de r sont les $x \in H_r$ tels que $r(x \otimes 1) = (x \otimes 1)$. Ces vecteurs forment un sous-espace vectoriel de H_r qui s'identifie naturellement avec $Mor(1, r)$.

On va donner maintenant une description des vecteurs fixes de la représentation $u^{\otimes k}$ de $A_o(F)$. Les résultats qui suivent seront utilisés dans la 4^{eme} section, pour démontrer le Théorème 1 pour les matrices F qui ne vérifient pas (!) la condition $F\overline{F} \in \mathbf{R}I_n$. Ainsi, le lecteur intéressé uniquement par les algèbres $A_u(F)$ avec $F\overline{F} \in \mathbf{R}I_n$ (e.g. par $A_u(I_n)$) pourra passer directement à la section suivante.

Lemme 1 *[B2] Soit $n \in \mathbf{N}$ et $F \in \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$ avec $F\overline{F} \in \mathbf{R}I_n$. Soit $H = \mathbf{C}^n$, avec la base orthonormale $\{e_i\}$.*

(i) L'opérateur $E \in B(\mathbf{C}, H^{\otimes 2})$, $x \mapsto x \sum e_i \otimes Fe_i$ est dans $Mor(1, u^{\otimes 2})$.

(ii) On a $(E^* \otimes Id_H)(Id_H \otimes E) \in \mathbf{C}Id_H$.

(iii) Pour $r, s \in \mathbf{N}$, on définit les ensembles $Mor(r, s) \subset B(H^{\otimes r}, H^{\otimes s})$ des combinaisons linéaires de produits (composables) d'applications de la forme $Id_{H^{\otimes k}}$ ou $Id_{H^{\otimes k}} \otimes E \otimes Id_{H^{\otimes p}}$ ou $Id_{H^{\otimes k}} \otimes E^* \otimes Id_{H^{\otimes p}}$. Alors la W^*-catégorie concrète monoïdale des représentations de $A_o(F)$ est la complétion (dans le sens de [Wo3]) de la W^*-catégorie concrète monoïdale

$$W(F) := \{\mathbf{N}, +, \{H^{\otimes r}\}_{r \in \mathbf{N}}, \{Mor(r, s)\}_{r, s \in \mathbf{N}}\}. \ \square$$

En gardant toutes les notations, on a :

Lemme 2 *(i) On note $I(p) = Id_{H^{\otimes p}}$ et $V(p, q) = I(p) \otimes E \otimes I(q)$. Alors tout morphisme de $W(F)$ est une combinaison linéaire d'applications de la forme $I(.)$ ou de la forme $V(.,.) \circ ... \circ V(.,.) \circ V(.,.)^* \circ ... \circ V(.,.)^*$.*

(ii) Pour tout $k \geq 0$, les applications de la forme $M \otimes I(1) \otimes N$ avec $M \in Mor(0, 2x)$, $N \in Mor(0, 2y)$ et $x + y = k$ engendrent $Mor(1, 2k+1)$.

(iii) Pour tout $k \geq 0$, les applications de la forme $(I(1) \otimes M \otimes I(1) \otimes N) \circ E$ avec $M \in Mor(0, 2x)$, $N \in Mor(0, 2y)$ et $x + y = k$ engendrent $Mor(0, 2k+2)$.

Démonstration. Le point (i), i.e. le fait qu'on "peut passer les $*$ à droite", résulte du point (ii) du Lemme 1. On démontre (ii) par récurrence sur k. Pour $k = 0$ le point (i) montre que $Mor(1,1) = \{\mathbf{C}I(1)\}$. Soit donc $k \geq 1$ et $A \in Mor(1, 2k+1)$. Par le point (i), A est une combinaison linéaire d'applications de la forme $V(k_1, s_1) \circ ... \circ V(k_m, s_m)$, avec $k_1 + s_1 = 2k - 1$ et $T := V(k_2, s_2) \circ ... \circ V(k_m, s_m)$ dans $Mor(1, 2k-1)$. Par l'hypothèse de récurrence T est une combinaison linéaire d'applications de la forme $B = (M \otimes I(1) \otimes N)$ pour certains $M \in Mor(0, 2x)$ et $N \in Mor(0, 2y)$, avec $x + y = k - 1$, donc :

- soit $k_1 \geq 2x + 1$, et alors $V(k_1, s_1) \circ B = M \otimes I(1) \otimes ((I(k_1 - 2x - 1) \otimes E \otimes I(s_1)) \circ N)$.
- soit $k_1 \leq 2x$, et alors $V(k_1, s_1) \circ B = ((I(k_1) \otimes E \otimes I(2x - k_1)) \circ M) \otimes I(1) \otimes N$.

On démontre maintenant (iii) : soit $A \in Mor(0, 2k+2)$. Par le point (i), A est une combinaison linéaire d'applications de la forme $B = V(k_1, s_1) \circ ... \circ V(k_m, s_m)$. Remarquons que $V(k_m, s_m) = V(0,0)$, donc on peut considérer le plus petit p tel que $k_p = 0$. Alors $B = (I(1) \otimes G) \circ (E \otimes I(s_p)) \circ K$, avec $G = V(k_1 - 1, s_1) \circ ... \circ V(k_{p-1} - 1, s_{p-1})$ et $K = V(k_{p+1}, s_{p+1}) \circ ... \circ V(k_m, s_m)$. Il en résulte que :

$$B = (I(1) \otimes G) \circ (I(2) \otimes K) \circ E = (I(1) \otimes (G \circ (I(1) \otimes K))) \circ E.$$

Mais $G \circ (I(1) \otimes K) \in Mor(1, 2k+1)$ est, par le point (ii), de la forme $M \otimes I(1) \otimes N$, pour certains $M \in Mor(0, 2x)$ et $N \in Mor(0, 2y)$, et (iii) en résulte. $\square$

Proposition 2 *On définit pour tout $k \in \mathbf{N}$ la partie $W_{2k}(F) \subset Mor(0, 2k)$ par $W_0(F) = 1$ et (par récurrence) par :*

$$W_{2k+2}(F) = \cup_{k=x+y} \{(I(1) \otimes M \otimes I(1) \otimes N) \circ E \mid M \in W_{2x}(F), N \in W_{2y}(F)\}$$

Alors $W_{2k}(F)$ est une base de $Mor(0, 2k)$, $\forall\, k \geq 0$.

Démonstration. Les nombres $D_k := Card(W_{2k}(F))$ vérifient $D_0 = D_1 = 1$ et

$$D_{k+1} = \sum_{k=x+y} D_x D_y \ .$$

Ce sont donc les nombres de Catalan (classique, considérer le carré de la série $\sum D_k z^k ...$). Il en résulte que $Card(W_{2k}(F)) = dim(Mor(0, 2k))$. D'autre part, le point (iii) du Lemme 2 montre que $W_{2k}(F)$ engendre $Mor(0, 2k)$. $\square$

Remarque. Soit $P = P_1 \coprod ... \coprod P_k$ une partition non-croisée en parties à deux éléments de $\{1, ..., 2k\}$, i.e. une partition telle que si on note $P_m = \{i_m, j_m\}$ avec $i_m < j_m$ pour chaque $1 \leq m \leq k$, alors :

$$\forall\, m \neq n,\ i_m < i_n < j_m \implies j_n < j_m.$$

On associe à P le vecteur suivant de $(\mathbf{C}^n)^{\otimes 2k}$:

$$v(P) = \sum_{1 \leq s_1 ... s_{2k} \leq k} F_{s_{j_1} s_{i_1}} ... F_{s_{j_k} s_{i_k}} e_{s_1} \otimes ... \otimes e_{s_{2k}}$$

On peut montrer par récurrence sur k, en utilisant la Proposition 2, que l'ensemble de ces $v(P)$ coincïde avec l'ensemble $\{X(1) \mid X \in W_{2k}(F)\}$, donc est une base de l'espace des vecteurs fixes de la représentation $u^{\otimes 2k}$ de $A_o(F)$. Ceci permet en principe de calculer la mesure de Haar de $A_o(F)$ - pour toute representation r d'un groupe quantique compact matriciel on a $(Id \otimes h)(r) =$ projecteur sur l'espace des vecteurs fixes de r (voir [Wo2]).

3 Reconstruction de $A_u(F)_{central}$

On construit et on étudie dans cette section l'algèbre A engendrée par des $\{r_x \mid x \in \mathbf{N} * \mathbf{N}\}$ qui se multiplient par les formules $r_x r_y = \sum_{x=ag, y=\overline{g}b} r_{ab}$.

Notations. $\mathbf{N} * \mathbf{N}$ est le produit libre (i.e. coproduit dans la catégorie des monoïdes) de deux copies de $\mathbf{N}$, notées multiplicativement $\{e, \alpha, \alpha^2, ...\}$ et $\{e, \beta, \beta^2, ...\}$. On considère l'ensemble A de fonctions $\mathbf{N} * \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ avec support fini. On va identifier $\mathbf{N} * \mathbf{N} \subset A$, comme masses de Dirac. Avec l'addition et la multiplication des fonctions A est l'algèbre des polynômes non commutatifs en deux variables, c'est à dire on a un isomorphisme :

$$(\mathbf{C} < X, X^* >, +, \cdot) \simeq (A, +, \cdot) \quad par \quad X \mapsto \alpha\,,\ X^* \mapsto \beta.$$

On définit sur $\mathbf{N} * \mathbf{N}$ une involution antimultiplicative par $\overline{e} = e$, $\overline{\alpha} = \beta$ et $\overline{\beta} = \alpha$. Cette involution s'étend par antilinéarité en une involution de A, notée encore $-$.

On note $E_n \subset A$ l'espace linéaire engendré par les éléments de $\mathbf{N} * \mathbf{N}$ de longeur $\leq n$.

Soit $l^2(\mathbf{N} * \mathbf{N})$ la complétion de A pour la norme 2. Notons que les éléments de $\mathbf{N} * \mathbf{N}$ (vus comme éléments de A, donc de $l^2(\mathbf{N} * \mathbf{N})$, voir les identifications ci-dessus) forment une base orthonormée de $l^2(\mathbf{N} * \mathbf{N})$.

Soit $\tau_0 : x \mapsto < x(e), e >$ l'état canonique sur $B(l^2(\mathbf{N} * \mathbf{N}))$. On définit $S, T \in B(l^2(\mathbf{N} * \mathbf{N}))$ par linéarité et $S(x) = \alpha x, T(x) = \beta x$ pour tout $x \in \mathbf{N} * \mathbf{N}$.

Rappel. A tout espace de Hilbert H on peut associer [VDN] l'espace de Fock plein $F(H)$: si $\{h_i\}_{i \in I}$ une base orthonormale de H, alors $\{h_{i_1} \otimes h_{i_2} \otimes ... \otimes h_{i_k} \mid k \geq 0\}$ est une base orthonormale de $F(H)$ (on fait la convention que pour $k = 0$, le vecteur correspondant est celui du vide).

Notons $\{f_i\}_{i \in I}$ les générateurs du monoïde libre $\mathbf{N}^{*I}$. Alors la base orthonormale canonique de $l^2(\mathbf{N}^{*I})$ est la famille $\{\delta_m\}$, avec $m \in \mathbf{N}^{*I}$, donc de la forme $m = f_{i_1} ... f_{i_k}$. On a donc une isometrie :

$$l^2(\mathbf{N}^{*I}) \simeq F(H) \quad par \quad \delta_{f_{i_1} ... f_{i_k}} \mapsto h_{i_1} \otimes h_{i_2} \otimes ... \otimes h_{i_k}.$$

L'opérateur de création $l(h_i)$ correspond ainsi à $\lambda_{N^{*I}}(f_i)$, où $\lambda_{N^{*I}}$ est la représentation régulière gauche (par isometries !) du monoïde $\mathbf{N}^{*I}$.

Pour $I = \{1, 2\}$ on a $S = \lambda_{N*N}(\alpha)$ et $T = \lambda_{N*N}(\beta)$, donc en identifiant $l^2(\mathbf{N} * \mathbf{N}) = F(H)$, avec H de base orthonormale $\{h_1, h_2\}$, on a :

$$S = l(h_1),\ T = l(h_2).$$

Lemme 3 *On définit l'application* $\odot : \mathbf{N} * \mathbf{N} \times \mathbf{N} * \mathbf{N} \to A$ *par*

$$x \odot y = \sum_{x = ag, y = \overline{g}b} ab.$$

(i) $\odot$ *s'étend par linéarité en une multiplication associative sur* A.

(ii) Si $P : (A, +, \cdot) \to (B(l^2(\mathbf{N} * \mathbf{N})), +, \circ)$ *est le* $*$*-morphisme défini par* $\alpha \mapsto S + T^*$ *et* $J : A \to A$ *est l'application* $f \mapsto P(f)e$, *alors* $(J - Id)E_n \subset E_{n-1}$ *pour tout* n.

(iii) J *est un isomorphisme de* $*$*-algèbres* $(A, +, \cdot) \simeq (A, +, \odot)$.

Démonstration. *(i)* Notons que $\odot$ est bien définie, car la somme est finie. Montrons qu'elle est associative. Soient $x, y, z \in \mathbf{N} * \mathbf{N}$. Alors

$$(x \odot y) \odot z = \sum_{\{g,a,b \in N*N | x=a\overline{g}, y=gb\}} ab \odot z = \sum_{\{g,h,a,b,c,d \in N*N | x=a\overline{g}, y=gb, ab=ch, z=\overline{h}d\}} cd$$

Remarquons que pour $a, b, c, h \in \mathbf{N} * \mathbf{N}$ l'égalité $ab = ch$ est équivalente à une décomposition de la forme $b = uh, c = au$ avec $u \in \mathbf{N} * \mathbf{N}$, ou de la forme $a = cv, h = vb$ pour un certain $v \in \mathbf{N} * \mathbf{N}$. Donc

$$(x \odot y) \odot z = \sum_{\{g,h,a,d,u \in N*N, x=a\overline{g}, y=guh, z=\overline{h}d\}} aud + \sum_{\{g,b,c,d,v \in N*N, x=cv\overline{g}, y=gb, z=\overline{b}\overline{v}d\}} cd$$

Un calcul similaire montre que $x \odot (y \odot z)$ est donné par la même formule, donc $\odot$ est associative.

(ii) Soit $f \in A$. On peut vérifier facilement que $P(\alpha)f = (S + T^*)f = \alpha \odot f$. Donc $J(\alpha g) = P(\alpha)J(g) = \alpha \odot J(g) = J(\alpha) \odot J(g)$ pour toute $g \in A$, et par le même argument on obtient $J(\beta g) = J(\beta) \odot J(g)$, pour toute $g \in A$. $(A, +, \cdot)$ étant engendrée par α et β, il en résulte que J est un morphisme d'algèbres :

$$J : (A, +, \cdot) \to (A, +, \odot).$$

On démontre par récurrence sur $n \geq 1$ que $(J - Id)E_n \subset E_{n-1}$. Pour $n = 1$ on a $J(\alpha) = \alpha$, $J(\beta) = \beta$ et $J(e) = e$, et comme E_1 est engendrée par e, α, β on a $J = Id$ sur E_1. Supposons que c'est vrai pour n et soit $k \in E_{n+1}$. On ecrit $k = \alpha f + \beta g + h$ avec $f, g, h \in E_n$ (a noter que cette décomposition n'est pas unique). Alors :

$$(J - Id)k = J(\alpha f + \beta g + h) - (\alpha f + \beta g + h) =$$
$$= [(S + T^*)J(f) + (S^* + T)J(g) + J(h)] - [Sf + Tg + h] =$$
$$= S(J(f) - f) + T(J(g) - g) + T^*J(f) + S^*J(g) + (J(h) - h).$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence à f, g, h on trouve que E_n contient tous les termes de la somme, donc contient $(J - Id)k$ et on a fini.

Enfin, pour démontrer (iii) il nous reste à voir que J préserve l'involution $*$ et qu'il est une bijectif. On a $J* = *J$ sur les générateurs $\{e, \alpha, \beta\}$ de A, donc J préserve l'involution. Aussi par (ii), la restriction de $J - Id$ à E_n est un endomorphisme nilpotent, donc J est bijectif. $\square$

Lemme 4 *Soit* (G, u) *un groupe quantique compact matriciel et soit* $\Psi_G :$ $(A, +, \odot) \to G$ *l'unique morphisme défini par* $\alpha \mapsto \chi(u)$, $\beta \mapsto \chi(\overline{u})$ *(cf. point (iii) du Lemme 3).*

Soit $n \geq 1$ *et supposons que* $\Psi_G(x)$ *est le caractère d'une représentation irréductible* r_x *de* G*, pour tout* $x \in \mathbf{N} * \mathbf{N}$ *de longeur* $\leq n$*. Alors* $\Psi_G(x)$ *est le caractère d'une représentation (non nulle) de* G*, pour tout* $x \in \mathbf{N} * \mathbf{N}$ *de longeur* $n + 1$*.*

Démonstration. Pour $n = 1$ c'est clair. Supposons $n \geq 2$ et soit $x \in \mathbf{N} * \mathbf{N}$ de longeur $n + 1$. Si x contient une puissance ≥ 2 de α ou de β, par exemple si $x = z\alpha^2 y$, alors on pose $r_x := r_{z\alpha} \otimes r_{\alpha y}$ et on a fini. Supposons donc que x est un produit des α alternant avec des β. On peut supposer que x commence avec α. Alors $x = \alpha\beta\alpha y$, avec $y \in \mathbf{N} * \mathbf{N}$ de longeur $n - 2$.

Notons que l'égalité $\Psi_G(\overline{z}) = \Psi_G(z)^*$ est vraie sur les générateurs $\{e, \alpha, \beta\}$ de $\mathbf{N} * \mathbf{N}$, donc elle est vraie pour tout $z \in \mathbf{N} * \mathbf{N}$. Si $<,>$ est le produit scalaire sur G associé à la mesure de Haar, alors (voir Rappels)

$< \chi(r_\alpha \otimes r_{\beta\alpha y}), \chi(r_{\alpha y}) >=< \chi(r_{\beta\alpha y}), \chi(r_\beta \otimes r_{\alpha y}) >=$
$< \chi(r_{\beta\alpha y}), \Psi_G(\beta \odot \alpha y) >=< \chi(r_{\beta\alpha y}), \Psi_G(\beta\alpha y) + \Psi_G(y) >=$
$< \chi(r_{\beta\alpha y}), \chi(r_{\beta\alpha y}) + \chi(r_y) > \geq 1.$

Comme $r_{\alpha y}$ est irréductible, il en résulte qu'elle est une sous-représentation de $r_\alpha \otimes r_{\beta\alpha y}$. Donc $\chi(r_\alpha \otimes r_{\beta\alpha y}) - \chi(r_{\alpha y}) = \Psi_G(\alpha \odot \beta\alpha y - \alpha y) = \Psi_G(x)$ est le caractére d'une représentation de G. $\square$

Soit (G, u) un groupe quantique compact matriciel et notons $f_x = \Psi_G(x)$ pour tout $x \in \mathbf{N} * \mathbf{N}$ (notations du Lemme 4). Alors la famille $\{f_x \mid x \in \mathbf{N} * \mathbf{N}\}$ vérifie $f_e = 1$, $f_\alpha = \chi(u)$, $f_\beta = \chi(\overline{u})$ et $f_x f_y = \sum_{x=ag, y=\overline{g}b} f_{ab}$. On veut montrer :

- le Théorème 1 (i) : pour $G = A_u(F)$, les f_x sont exactement les caractères des représentations irréductibles de $A_u(F)$.

- le Théorème 2 : si les f_x sont les caractères des représentations irréductibles de G, alors $G_p \sim_{sim} A_u(F)$ pour une certaine matrice F.

Il est commode de considérer, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $F \in \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$ et pour tout groupe quantique compact matriciel (G, u) avec $u, F\overline{u}F^{-1}$ unitaires, le diagramme suivant :

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbf{N} * \mathbf{N} & & \mathbf{N} * \mathbf{N} & & A_u(F) \\
\cap & & \cap & \nearrow \Psi_u & \downarrow \Phi \\
C < X, X^* >= (A, +, \cdot) & \xrightarrow{J} & (A, +, \odot) & \xrightarrow{\Psi_G} & G_p \\
P \downarrow & & \tau \downarrow & (\star) & \downarrow h \\
B(l^2(\mathbf{N} * \mathbf{N})) & \xrightarrow{\tau_0} & \mathbf{C} & \xrightarrow{Id_{\mathbf{C}}} & \mathbf{C}
\end{array}
$$

où :

- τ_0, J, P ont déjà été définies et $\tau(f) = f(e) =$ coefficient de e dans f. La commutation du carré est évidente.

- G_p est la version pleine de G (voir Rappels) et Φ est la surjection canonique, définie par la propriété universelle de $A_u(F)$.

- Ψ_G (resp. Ψ_u) est l'unique $*$-morphisme (voir Lemme 3 (iii)) qui envoie α sur le caractère de la représentation fondamentale de G_p (resp. de $A_u(F)$). La commutation du triangle est évidente.

- h est la mesure de Haar de G.

Notons que les inclusions (voir Notations du début) $\mathbf{N} * \mathbf{N} \subset A$ ne commutent pas avec J.

Proposition 3 *Soit (G, u) un groupe quantique compact matriciel avec u et $F\overline{u}F^{-1}$ unitaires. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) Les représentations irréductibles de G sont indexées par $\mathbf{N} * \mathbf{N}$, avec $r_e = 1, r_\alpha = u, r_\beta = \overline{u}$ et $r_x \otimes r_y = \sum_{x=ag, y=\overline{g}b} r_{ab}$.

2) Le diagramme $(\star)$ commute.

3) $\chi(u)/2$ est une variable circulaire dans (G, h).

4) Tous les $*$-moments de $\chi(u)/2 \in (G, h)$ sont plus petits que les $*$-moments d'une variable circulaire, i.e. $\mu_{\chi(u)/2}(M) \leq \mu_c(M)$ pour tout monome non commutatif M (où μ_c est la $*$-distribution de la variable circulaire).

De plus, si ces conditions sont vérifiées, alors :

5) $\Phi : A_u(F) \to G_p$ est un $*$-isomorphisme.

Note. On verra dans la section suivante que la condition 5) est en fait equivalente à 1)-4).

Démonstration. ($1 \Rightarrow 2$) Il est clair que $\mathbf{N}*\mathbf{N}$ est un système orthonormal dans $((A,+,\odot),\tau)$. Si 1) est vraie, alors $\Psi_G(\mathbf{N}*\mathbf{N}) = \{\chi(r_x) \mid x \in \mathbf{N}*\mathbf{N}\}$ est un système orthonormal dans (G_s, h), d'où la commutativité de $(\star)$.

($2 \Rightarrow 3$) Remarquons que $(\star)$ commute $\Longleftrightarrow h\Psi_G J = \tau_0 P$. En identifiant $(\mathbf{C} < X, X^* >, +, \cdot) = (A, +, \cdot)$ on a (voir Rappel G):

- la $*$-distribution de $\chi(u) \in (G, h)$ est la fonctionnelle $h\Psi_G J$.

- la $*$-distribution de $S + T^* \in (B(l^2(\mathbf{N}*\mathbf{N})), \tau_0)$ est la fonctionnelle $\tau_0 P$.

D'autre part, les identifications du début de cette section montrent que $(S+T^*)/2$ a la même $*$-distribution que la variable $(l(h_1) + l(h_2)^*)/2$ sur l'espace de Fock plein, qui est l'exemple standard de variable circulaire (voir 1^{ere} section de [V]).

($3 \Rightarrow 4$) est trivial. Montrons ($4 \Rightarrow 1$). Toujours en identifiant $(\mathbf{C} < X, X^* >, +, \cdot) = (A, +, \cdot)$, les monômes non-commutatifs en X, X^* correspondent aux éléments de $\mathbf{N}*\mathbf{N} \subset A$. Donc l'hypothèse sur les $*$-moments de $\chi(u)/2$ se traduit tout simplement par :

$$(i) \qquad h\Psi_G J \le \tau J \quad sur \quad \mathbf{N}*\mathbf{N}$$

On démontre par récurrence sur $n \ge 0$ que pour tout $z \in \mathbf{N}*\mathbf{N}$ de longeur n, $\Psi_G(z)$ est le caractère d'une représentation irréductible r_z de G. Pour $n = 0$ on a $\Psi_G(e) = 1$, qui est le caractère de la représentation triviale. Supposons donc que c'est vrai pour $n \ge 0$ et soit $x \in \mathbf{N}*\mathbf{N}$ de longeur $n+1$.

Le point (ii) du lemme 3 implique $J(x) = x + z$ avec $z \in E_n$. Notons $A_N \subset A$ l'ensemble des fonctions f telles que $f(x) \in \mathbf{N}$ pour tout $x \in \mathbf{N}*\mathbf{N}$. Alors $J(\alpha), J(\beta) \in A_N$, donc par multiplicativité, $J(\mathbf{N}*\mathbf{N}) \subset A_N$. En particulier, $J(x) \in A_N$. Il en résulte qu'il existe des entiers positifs $m(z)$ tels que :

$$J(x) = x + \sum_{z \in N*N, l(z) \le n} m(z)z.$$

Calculons à l'aide de cette formule $h\Psi_G J(x\overline{x})$ et $\tau J(x\overline{x})$:

a) Il est clair que si $a, b \in \mathbf{N}*\mathbf{N}$, alors $\tau(a \odot \overline{b}) = \delta_{a,b}$. On obtient donc :

$$\tau J(x\overline{x}) = \tau((x + \sum m(z)z) \odot (\overline{x} + \sum m(z)\overline{z})) = 1 + \sum m(z)^2.$$

b) Par l'hypothèse de récurrence et par le lemme 4, $\Psi_G(x)$ est le caractère d'une représentation r_x de G. Donc $\Psi_G J(x)$ est le caractère de

$r_x + \sum_{z \in N*N, l(z) \leq n} m(z) r_z$. Par les formules d'orthogonalité des caractères on a :

$$h\Psi_G J(x\overline{x}) \geq h(\chi(r_x)\chi(r_x)^*) + \sum m(z)^2.$$

En utilisant (i), a) et b) on conclut que r_x est irréductible, ce qui termine la récurrence.

Le fait que les r_x ainsi construites soient distinctes résulte de (i). En effet, $\mathbf{N} * \mathbf{N}$ étant une base orthonormée de $((A, +, \odot), \tau)$, on obtient que pour tous les $x, y \in \mathbf{N} * \mathbf{N}$, $x \neq y$ on a $\tau(x \odot \overline{y}) = 0$, donc que :

$$h(\chi(r_x \otimes \overline{r_y})) = h\Psi_G J(x\overline{y}) \leq \tau J(x\overline{y}) = \tau(x \odot \overline{y}) = 0.$$

$(1 \Rightarrow 5)$ On montre par récurrence sur $n \geq 0$ que pour tout $x \in \mathbf{N} * \mathbf{N}$ de longeur n, $\Psi_u(x)$ est le caractère d'une représentation irréductible p_x de $A_u(F)$. Pour $n = 0$ c'est trivial - $\Psi_u(e)$ est le caractère de la représentation triviale. Supposons-le pour n et soit $x \in \mathbf{N} * \mathbf{N}$ de longeur $n + 1$. Par le lemme 4, $\Psi_u(x)$ est le caractère d'une représentation p_x. Comme Φ envoie $p_x \mapsto r_x$, qui est irréductible, p_x est aussi irréductible, donc on a fini.

La surjection Φ envoie donc les (classes de) représentations irréductibles de $A_u(F)$ sur les (classes de) représentations irréductibles de G_p. On conclut en utilisant un argument standard (Th. 5.7 de [Wo2]) : soit $\{c_i\}$ une base de $A_u(F)_s$ formée des coefficients des représentations irréductibles ; alors $\{\Phi(c_i)\}$ est une base de G_s formée des coefficients des représentations irréductibles. Il en résulte que $\Phi : A_u(F) \to G_p$ est bijective. $\square$

4 Représentations de $A_u(F)$

Cette section est consacrée à la démonstration des théorèmes 1 et 2. On verra que la Proposition 3 implique facilement le théorème 2, ainsi que (modulo un résultat de probabilités libres) le théorème 1 pour des matrices vérifiant $F\overline{F} \in \mathbf{R}I_n$. Le théorème 1 sera ensuite démontré pour des matrices $F \in \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$ arbitraires, en utilisant les résultats obtenus pour $F = I_n$.

Démonstration du théorème 2. On se donne un groupe quantique compact matriciel (G, u) avec $u \in M_n(G)$ tel que ses représentations irréductibles sont indexées par $\mathbf{N} * \mathbf{N}$, avec $r_e = 1$, $r_\alpha = u$, $r_\beta = \overline{u}$ et telles que $\forall\, x, y$

$$r_x \otimes r_y = \sum_{x = ag, y = \overline{g}b} r_{ab}.$$

On peut supposer (modulo la similarité) que u est unitaire. Il existe donc $F \in \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$ telle que $F\overline{u}F^{-1}$ soit unitaire, et le théorème résulte alors de l'implication $(1 \Rightarrow 5)$ de la Proposition 3. $\square$

Démonstration du théorème 1 dans le cas $F\overline{F} \in \mathbf{R}I_n$. Soit $n \in \mathbf{N}$ et $F \in \mathbf{GL}(n)$ telle que $F\overline{F} \in \mathbf{R}I_n$. On note u la représentation fondamentale de $A_u(F)$, v la représentation fondamentale de $A_o(F)$ et $z \in C(\mathbf{T})$ la fonction $x \mapsto x$. Soit G la sous-$\mathbf{C}^*$-algèbre de $C(\mathbf{T}) *_{red} A_o(F)$ engendrée par les coefficients de la matrice $zv = (zv_{ij})_{ij}$. Alors :

• $\chi(v)/2$ est semicirculaire par rapport à la mesure de Haar de $A_o(F)$ (cf. Prop. 1).
• z est un Haar-unitaire dans $C(\mathbf{T})$ muni de sa mesure de Haar (évident).
• $\chi(v)/2$ et z sont $*$-libres dans $C(\mathbf{T}) *_{red} A_o(F)$ par rapport a sa mesure de Haar (cf. Rappel F).

Ces trois conditions impliquent que le produit $z\chi(v)/2$ est circulaire dans $C(\mathbf{T}) *_{red} A_o(F)$ (ceci est une version connue du théorème de Voiculescu [V] de décomposition polaire des variables circulaires, voir par exemple [B1] ou [NS]). Mais $z\chi(v) = \chi(zv)$ est le caractère de la représentation fondamentale de (G, zv), donc on peut appliquer la Proposition 3 :

$(3 \Rightarrow 5)$ implique $A_u(F) = G_p$, donc que $A_u(F)_{red} = G$, d'où le point (iv) du théorème 1.

$(3 \Rightarrow 1)$ classifie les représentations de $G_p = A_u(F)$, d'où (i,ii,iii). $\square$

Remarque. On aurait pu démontrer le théorème 1 dans le cas $F\overline{F} \in \mathbf{R}I_n$ de la manière suivante. On considère le groupe quantique compact $G \subset C(\mathbf{T}) *_{red} A_o(F)$ engendré par les coefficients de zv, v étant la représentation fondamentale de $A_o(F)$. En combinant la théorie des représentations de $A_o(F)$ de [B2] avec la théorie des représentations des produits libres de [W2], on peut classifier les représentations de G. On applique ensuite le théorème 2, pour voir que $A_u(F)_{red} = G$. Notons que cette démonstration ne fournit aucun outil pour aborder le cas général.

Démonstration du théorème 1 dans le cas général. Soit $n \in \mathbf{N}$ et $F \in \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$ quelconque. Notons u la représentation fondamentale de $A_u(F)$. On doit estimer les $*$-moments du caractère $\chi(u)$, i.e. les nombres :

$$h(\chi(u)^{a_1}\chi(u)^{*b_1}\chi(u)^{a_2}...) = dim(Mor(1, u^{\otimes a_1} \otimes \overline{u}^{\otimes b_1} \otimes u^{\otimes a_2} \otimes ...)).$$

En utilisant le fait que $\mathbf{N} * \mathbf{N}$ est un monoïde libre :

- on associe à tout espace de Hilbert H une famille d'espaces de Hilbert $\{H_x\}_{x\in N*N}$ de la manière suivante : $H_e = \mathbf{C}$, $H_\alpha = H$, $H_\beta = \overline{H}$ (l'espace conjugué de H), et $H_{ab} = H_a \otimes H_b$, $\forall\, a, b \in \mathbf{N} * \mathbf{N}$.

- on définit une famille $\{u^x\}_{x\in N*N}$ de représentations unitaires de $A_u(F)$ de la manière suivante : $u^e = 1$, $u^\alpha = u$, $u^\beta = F\overline{u}F^{-1}$ (agissant sur $\overline{\mathbf{C}}^n$) et $u^{ab} = u^a \otimes u^b$, $\forall\, a, b \in \mathbf{N} * \mathbf{N}$. Notons que $u^x \in B(\mathbf{C}^n_x) \otimes A_u(F)$ pour tout x.

Les $*$-moments de $\chi(u)$ sont ainsi les nombres

$$\{dim(Mor(1, u^k)) \mid k \in \mathbf{N} * \mathbf{N}\}.$$

On va les estimer en appliquant le Th. 1.3. de [Wo3] :

Lemme 5 *Soit $n \in \mathbf{N}$ et $F \in \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$. Soit $H = \mathbf{C}^n$, avec la base orthonormale $\{e_i\}$. On considère les applications linéaires $E_1 : H_e \to H_{\alpha\beta}$ définie par $1 \mapsto \sum F(e_i)\otimes\overline{e}_i$ et $E_2 : H_e \to H_{\beta\alpha}$ définie par $1 \mapsto \sum \overline{e}_i\otimes\overline{F}^{-1}(e_i)$.*

(i) $E_1 \in Mor(1, u^{\alpha\beta})$ et $E_2 \in Mor(1, u^{\beta\alpha})$.

(ii) $(E_2^*\otimes Id_{H_\beta})(Id_{H_\beta}\otimes E_1) \in \mathbf{C}Id_{H_\beta}$ et $(E_1^*\otimes Id_{H_\alpha})(Id_{H_\alpha}\otimes E_2) \in \mathbf{C}Id_{H_\alpha}$.

(iii) Pour $r, s \in \mathbf{N} * \mathbf{N}$, on définit les ensembles $Mor(r, s) \subset B(H_r, H_s)$ des combinaisons linéaires de produits (composables) d'applications de la forme Id_{H_k} ou $Id_{H_k}\otimes E_1\otimes Id_{H_p}$ ou $Id_{H_k}\otimes E_2\otimes Id_{H_p}$ ou $Id_{H_k}\otimes E_1^*\otimes Id_{H_p}$ ou $Id_{H_k}\otimes E_2^*\otimes Id_{H_p}$. Alors la W^*-catégorie concrète monoïdale des représentations de $A_u(F)$ est la complétion (dans le sens de [Wo3]) de la W^*-catégorie concrète monoïdale

$$Z(F) := \{\mathbf{N} * \mathbf{N}, \cdot, \{H_r\}_{r\in N*N}, \{Mor(r, s)\}_{r,s\in N*N}\}.$$

Démonstration. (i) Si $w \in M_n(B)$ est une matrice unitaire à coefficients dans une $*$-algèbre B et si $\zeta = \sum e_i \otimes e_i \in \mathbf{C}^n \otimes \mathbf{C}^n$ alors

$$(w_{13}\overline{w}_{23})(\zeta \otimes 1) = \sum e_i \otimes e_k \otimes w_{ia}w_{ka}^* = \sum e_i \otimes e_k \otimes \delta_{ik}1 = (\zeta \otimes 1).$$

En particulier :

- pour $B := A_u(F)$ et $w := u$ cela montre que $(1 \otimes F)\zeta = \sum e_i \otimes Fe_i$ est un vecteur fixe de $(1 \otimes F)(u \otimes \overline{u})(1 \otimes F)^{-1} = u \otimes (F\overline{u}F^{-1})$.

- pour $B := A_u(F)$ et $w := F\overline{u}F^{-1}$ cela montre que $(1 \otimes \overline{F}^{-1})\zeta = \sum e_i \otimes \overline{F}^{-1}e_i$ est un vecteur fixe de $(1 \otimes \overline{F})^{-1}(w \otimes \overline{w})(1 \otimes \overline{F}) = (F\overline{u}F^{-1}) \otimes u$.

Par définition des u^x on a $u^{\alpha\beta} = (id_{\mathbf{C}^n} \otimes \phi \otimes id_{A_u(F)})(u \otimes (F\overline{u}F^{-1}))$ et $u^{\beta\alpha} = (\phi \otimes id_{\mathbf{C}^n} \otimes id_{A_u(F)})((F\overline{u}F^{-1}) \otimes u)$, où $\phi : B(\mathbf{C}^n) \to B(\overline{\mathbf{C}}^n)$ est l'isomorphisme canonique, et (i) en résulte.

(ii) est un calcul facile. Pour (iii), notons que $Z(F)$ est par construction une W^*-catégorie monoïdale concrète. Soit $j : H_\alpha \to H_\beta$ l'application antilinéaire définie par $e_i \to F(\overline{e}_i)$. Alors (avec les notations de [Wo3], page 39) on a $t_j = E_1$ et $(\bar{t}_j)^* = t_{j^{-1}} = E_2$, donc $t_j \in Mor(e, \alpha\beta)$ et $\bar{t}_j \in Mor(1, \beta\alpha)$, donc $\overline{\alpha} = \beta$ dans $Z(F)$. Par [Wo3], la paire universelle $Z(F)$-admissible est un groupe quantique compact (G, v).

Le point (i) montre que $(A_u(F), u)$ est une paire $Z(F)$-admissible, donc qu'on a un $\mathbf{C}^*$-morphisme $f : G \to A_u(F)$ tel que $(id \otimes f)(v) = u$. D'autre part la propriété universelle de $A_u(F)$ permet de construire un $\mathbf{C}^*$-morphisme $g : A_u(F) \to G$ tel que $(id \otimes g)(u) = v$. Il en résulte que $(G, v) = (A_u(F), u)$. $\square$

La démonstration du Lemme suivant est similaire à celle du Lemme 2.

Lemme 6 *(i) On note $I(p) = Id_{H_p}$ et $V_i(p, q) = I(p) \otimes E_i \otimes I(q)$ pour $i = 1, 2$. Alors tout morphisme de $Z(F)$ est une combinaison linéaire d'applications de la forme $I(.)$ ou de la forme $V.(., .) \circ ... \circ V.(., .) \circ V.(., .)^* \circ ... \circ V.(., .)^*$.*

(ii) L'ensemble des applications de la forme $M \otimes I(\alpha) \otimes N$ avec $M \in Mor(e, x)$, $N \in Mor(e, y)$ et $x\alpha y = k$ engendre $Mor(\alpha, k)$. L'ensemble des applications de la forme $M \otimes I(\beta) \otimes N$ avec $M \in Mor(e, x)$, $N \in Mor(e, y)$ et $x\beta y = k$ engendre $Mor(\beta, k)$.

(iii) L'ensemble des applications de la forme $(I(\alpha) \otimes M \otimes I(\beta) \otimes N) \circ E_1$ avec $M \in Mor(e, x)$, $N \in Mor(e, y)$ et $\alpha x \beta y = k$, ou des applications de la forme $(I(\beta) \otimes M \otimes I(\alpha) \otimes N) \circ E_2$ avec $M \in Mor(e, x)$, $N \in Mor(e, y)$ et $\beta x \alpha y = k$ engendre $Mor(e, k)$. $\square$

Proposition 4 *On définit pour tout $k \in \mathbf{N} * \mathbf{N}$ la partie $Z_k(F) \subset Mor(e, k)$ par $Z_e(F) = 1$, $Z_\alpha(F) = Z_\beta(F) = \emptyset$ et (par récurrence) par*

$$Z_k(F) = \cup_{k=\alpha x \beta y}\{(I(\alpha) \otimes M \otimes I(\beta) \otimes N) \circ E_1 \mid M \in Z_x(F), N \in Z_y(F)\}$$

si k commence par α et

$$Z_k(F) = \cup_{k=\beta x \alpha y}\{(I(\beta) \otimes M \otimes I(\alpha) \otimes N) \circ E_2 \mid M \in Z_x(F), N \in Z_y(F)\}$$

si k commence par β. Alors :

(i) $Z_k(F)$ engendre $Mor(e, k)$.

(ii) $Z_k(I_n)$ est une base de $Mor(e, k)$ (pour $F = I_n$).

Démonstration. (i) résulte du point (iii) du Lemme 6.

Rappelons que H_k est un certain produit tensoriel entre H et son conjugué. Soit $\psi : H \to \overline{H}$ l'isometrie donnée par $e_i \mapsto \overline{e}_i$. En identifiant $\overline{H}$ avec H à l'aide de ψ, on obtient une isometrie $\psi_k : H_k \to H^{\otimes l(k)}$, où $l(k)$ est la longeur du mot k.

En regardant les définitions, il est clair que ψ_k envoie l'ensemble $\{X(1) \mid X \in Z_k(I_n)\}$ sur une partie de l'ensemble $\{X(1) \mid X \in W_{l(k)}(I_n)\}$.

En utilisant la Proposition 2, l'ensemble $\{X(1) \mid X \in W_{l(k)}(I_n)\}$ est formé de vecteurs linéairement indépendents de $H^{\otimes l(k)}$. Ceci implique que $\{X(1) \mid X \in Z_k(I_n)\}$ est formé de vecteurs linéairement indépendents, donc que $Z_k(I_n)$ est une base de $Mor(e, k)$. $\square$

Fin de la démonstration du théorème 1. Rappelons que $n \in \mathbf{N}$ et $F \in \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$ sont arbitraires. Par construction de $Z_k(F)$ on a $Card(Z_k(F)) = C_k$, où les nombres $\{C_x\}_{x \in N*N}$ sont définis par $C_e = 1$, $C_\alpha = C_\beta = 0$ et $C_k = \sum_{k=\alpha x \beta y} C_x C_y + \sum_{k=\beta x \alpha y} C_x C_y$ pour $k \in \mathbf{N} * \mathbf{N}$.

Notons $u(F)$ la représentation fondamentale de $A_u(F)$. En utilisant les points (iii) du Lemme 5 et (i) de la Proposition 4 on a pour tout $k \in \mathbf{N} * \mathbf{N}$:

$$dim(Mor(1, u(F)^k)) = dim(Mor(e, k)) \leq Card(Z_k(F)) = C_k.$$

La Proposition 4 (ii) dit que pour $F = I_n$ on a égalité. Donc :

$$dim(Mor(1, u(F)^k)) \leq dim(Mor(1, u(I_n)^k)).$$

Mais les nombres $dim(Mor(1, u(F)^k))$ sont les $*$-moments du caractère de $u(F)$ et les nombres $dim(Mor(1, u(I_n)^k))$ sont les $*$-moments du caractère de $u(I_n)$, donc les $*$-moments d'une variable circulaire (par le point (iii) du th. 1 appliqué a $F = I_n$, cas déjà résolu). On conclut à l'aide de la proposition 3. $\square$

Remarque. Il est clair maintenant que pour toute matrice F, $\{X(1) \mid X \in Z_k(F)\}$ est une base de l'ensemble des vecteurs fixes de la représentation $u(F)^k$ de $A_u(F)$. Si $F\overline{F} \in \mathbf{R}I_n$, l'application ψ_k qu'on a construit dans la démonstration de la Proposition 4 permet d'identifier ces vecteurs comme une partie de la base des vecteurs fixes de la représentation $u^{\otimes l(k)}$ de $A_o(F)$ de la fin de la section 2 (en fait, cette identification est celle qui correspond à la flèche canonique $A_u(F) \to A_o(F)$).

Il est facile à détérminer les partitions non-croisées en parties à deux éléments de $\{1...l(k)\}$ qui correspondent aux vecteurs fixes de la représentation u^k de $A_u(F)$. En fait, on peut obtenir une base de l'ensemble des vecteurs fixes de la représentation u^k de $A_u(F)$ en ecrivant $k = x_1...x_{l(k)}$ avec $x_i \in \{\alpha, \beta\}$ et en associant à toute partition non-croisée $P = P_1 \coprod ... \coprod P_{l(k)/2}$ de $\{1, ..., k\}$ avec des parties de la forme $P_s = \{i_s, j_s\}$ telles que (x_{i_s}, x_{j_s}) soit égale à (α, β) ou à (β, α) pour tout s le vecteur suivant :

$$v = \sum_{1 \leq s_1 ... s_{l(k)} \leq l(k)} F_{s_{j_1} s_{i_1}} ... F_{s_{j_{l(k)/2}} s_{i_{l(k)/2}}} e_{s_1} \otimes ... \otimes e_{s_{l(k)}}.$$

5 Le cas $n = 2$

Rappelons que pour $\mu \in [-1, 1] - \{0\}$ le groupe quantique compact matriciel $\mathbf{S}_\mu\mathbf{U}(2)$ est défini avec générateurs α, γ et relations

$$\alpha^*\alpha + \gamma^*\gamma = 1,\ \alpha\alpha^* + \mu^2\gamma\gamma^* = 1,\ \gamma\gamma^* = \gamma^*\gamma,\ \mu\gamma\alpha = \alpha\gamma,\ \mu\gamma^*\alpha = \alpha\gamma^*.$$

On a $\mathbf{S}_1\mathbf{U}(2) = C(\mathbf{SU}(2))$ (voir [Wo1] et les formules (1.33) de [Wo2]).

Proposition 5 $A_o\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mu^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{S}_\mu\mathbf{U}(2)$.

Démonstration. Notons $\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$ la représentation fondamentale de $A_o\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mu^{-1} & 0 \end{pmatrix}$. Les relations qui définissent $A_o\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mu^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ sont $uu^* = u^*u = 1$ et :

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mu^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En multipliant, $\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{22}^* & -\mu u_{21}^* \\ -\mu^{-1}u_{12}^* & u_{11}^* \end{pmatrix}$. Si $\alpha := u_{11}$ et $\gamma := u_{21}$, alors $u = \begin{pmatrix} \alpha & -\mu\gamma^* \\ \gamma & \alpha^* \end{pmatrix}$ et les relations qui définissent $A_o\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mu^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ sont celles données par $uu^* = u^*u = 1$, i.e. :

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\mu\gamma^* \\ \gamma & \alpha^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^* & \gamma^* \\ -\mu\gamma & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^* & \gamma^* \\ -\mu\gamma & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -\mu\gamma^* \\ \gamma & \alpha^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En calculant on obtient les relations qui définissent $\mathbf{S}_\mu\mathbf{U}(2)$. □

Proposition 6 *Pour tous les* $n \in \mathbf{N}$, $F \in \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$, $\lambda \in \mathbf{C}^*$ *et* $V, W \in \mathbf{U}(n)$ *on a les similarités suivantes :*

(i) $A_o(F) \sim_{sim} A_o(\lambda V F V^t)$ *(si* F *vérifie* $F\overline{F} \in \mathbf{R}I_n$*).*

(ii) $A_u(F) \sim_{sim} A_u(\lambda V F W)$*.*

Démonstration. *(i)* Notons u (resp. v) la représentation fondamentale de $A_o(F)$ (resp. $A_o(\lambda V F V^t)$). Alors $v = (\lambda V F V^t)\overline{v}(\lambda V F V^t)^{-1}$ est unitaire $\Longrightarrow v = VFV^t\overline{v}\overline{V}F^{-1}V^*$ est unitaire . Il en résulte que $V^*vV = F\overline{V^*vV}F^{-1}$ est unitaire, donc on peut définir $f : A_o(F) \to A_o(\lambda V F V^t)$ par la propriété universelle et par $(Id \otimes f)(u) = V^*vV$. Par les mêmes arguments, il existe $g : A_o(\lambda V F V^t) \to A_o(F)$ avec $(Id \otimes g)(v) = VuV^*$. Donc f et g sont des bijections inverses, donc f est un isomorphisme, donc une similarité.

(ii) Notons u (resp. v) la représentation fondamentale de $A_u(F)$ (resp. $A_u(\lambda V F W)$). Alors v et $(\lambda V F W)\overline{v}(\lambda V F W)^{-1}$ sont unitaires, donc $\overline{W}vW^t$ et $FW\overline{v}W^*F^{-1}$ sont unitaires, donc $\overline{W}vW^t$ et $F\overline{\overline{W}vW^t}F^{-1}$ sont unitaires. On peut donc définir $f : A_u(F) \to A_u(\lambda V F W)$ par la propriété universelle et par $(Id \otimes f)(u) = \overline{W}vW^t$. Par les mêmes arguments, il existe $g : A_u(\lambda V F W) \to A_u(F)$ avec $(Id \otimes g)(v) = W^t u \overline{W}$. Alors f et g sont des bijections inverses. □

Proposition 7 *Pour tout* $\mu \in [-1, 1] - \{0\}$ *soit* G_μ *la* $\mathbf{C}^*$*-algèbre engendrée dans* $C(\mathbf{T}) *_{red} \mathbf{S}_\mu\mathbf{U}(2)$ *par les coefficients de la matrice* zu_μ*,* u_μ *étant la représentation fondamentale de* $\mathbf{S}_\mu\mathbf{U}(2)$*. Alors on a (modulo la similarité) les égalités suivantes :*

(i) $\{A_o(F) \mid F \in \mathbf{GL}(2, \mathbf{C})\} = \{\mathbf{S}_\mu\mathbf{U}(2) \mid \mu \in [-1, 1] - \{0\}\}$.

(ii) $\{A_u(F)_{red} \mid F \in \mathbf{GL}(2, \mathbf{C})\} = \{G_\mu \mid \mu \in [-1, 1] - \{0\}\}$.

Démonstration. *(i)* Il suffit de montrer que pour chaque $F \in \mathbf{GL}(2, \mathbf{C})$ telle que $F\overline{F} \in \mathbf{R}$, il existe $V \in \mathbf{GL}(2, \mathbf{C})$ multiple scalaire d'une matrice unitaire tel que $\lambda V F V^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mu^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ pour un certain μ (cf. Propositions 5 et 6). Soit donc $F = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Si $x \neq 0$, soit α une solution de $\alpha^2 x + \alpha(y+z) + t = 0$ et $V = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$, qui est un multiple scalaire d'une matrice unitaire ; alors VFV^t a le 1^{er} coefficient $\alpha^2 x + \alpha(y+z) + t = 0$, donc on peut supposer $x = 0$. Dans le cas $F = \begin{pmatrix} 0 & y \\ z & t \end{pmatrix}$ on a $F\overline{F} = \begin{pmatrix} y\overline{z} & y\overline{t} \\ t\overline{z} & z\overline{y} + t\overline{t} \end{pmatrix}$.

Comme $F\overline{F} \in \mathbf{R}$, $t = 0$ et $y\overline{z} = z\overline{y}$, donc $F = y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix}$ avec $k = z/y \in \mathbf{R}^*$. Si $\mid k \mid \geq 1$ on a fini. Sinon, on pose $V = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(ii) Il suffit de montrer que pour chaque $F \in \mathbf{GL}(2, \mathbf{C})$ il existent $V, W \in \mathbf{U}(2)$ telles que $VFW\overline{VFW} \in \mathbf{R}$ (cf. point (i) et Proposition 6). En effet, on peut supposer (par décomposition polaire) que $F > 0$; en la diagonalisant, on peut supposer $F = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$, avec $x, y > 0$, et dans ce cas on pose $V = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $W = 1$. $\square$

Lemme 7 *Notons* $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$, (z) *et* u *les représentations fondamentales de* $C(\mathbf{SU}(2))$, $C(\mathbf{T})$ *et* $A_u(I_2)$ *respectivement. Alors il existe un plongement :*

$$A_u(I_2)_{red} \hookrightarrow C(\mathbf{T}) *_{red} C(\mathbf{SU}(2))\,, \quad u \mapsto \begin{pmatrix} za & zb \\ -z\bar{b} & z\overline{a} \end{pmatrix}.$$

Démonstration. On a $A_o\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{S}_1\mathbf{U}(2) = C(\mathbf{SU}(2))$ (Prop. 5), $A_u(I_2) = A_u\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (car $A_u(F) = A_u(\sqrt{F^*F})$ pour toute F), et par le théorème 1 on a un plongement $A_u\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \hookrightarrow C(\mathbf{T}) *_{red} A_o\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. $\square$

Théorème 5 *Les coefficients de la représentation* $r_{\beta\alpha} = \overline{u} \otimes u - 1$ *de* $A_u(I_2)$ *commutent entre eux et engendrent une* $\mathbf{C}^*$*-algèbre égale à* $C(\mathbf{SO}(3))$*. De même pour les coefficients de* $r_{\alpha\beta} = u \otimes \overline{u} - 1$.

Démonstration. En utilisant le Lemme 7 on voit que la représentation $\overline{u} \otimes u$ de $A_u(I_2)_{red}$ est la representation

$$\overline{\begin{pmatrix} za & zb \\ -z\bar{b} & z\overline{a} \end{pmatrix}} \otimes \begin{pmatrix} za & zb \\ -z\bar{b} & z\overline{a} \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \overline{a} \end{pmatrix}} \otimes \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \overline{a} \end{pmatrix}.$$

de $C(\mathbf{T}) *_{red} C(\mathbf{SU}(2))$. Il en résulte que la représentation $\overline{u} \otimes u - 1$ de $A_u(I_2)_{red}$ correspond à la représentation de dimension 3 de $\mathbf{SU}(2)$, i.e. à la représentation fondamentale de $\mathbf{SO}(3)$. Donc les coefficients de la représentation $r_{\beta\alpha} = \overline{u} \otimes u - 1$ de $A_u(I_2)_{red}$ commutent entre eux et engendrent une

$\mathbf{C}^*$-algèbre commutative égale à $C(\mathbf{SO}(3))$. On conclut en remarquant que $C(\mathbf{SO}(3))$ est la $\mathbf{C}^*$-algèbre enveloppante de $C(\mathbf{SO}(3))_s$. □

On va montrer maintenant que l'algèbre de von Neumann $A_u(I_2)^{"}_{red}$ (le bicommutant de l'image de $A_u(I_2)$ par sa représentation régulière gauche sur $l^2(A_u(I_2), h)$, h étant la mesure de Haar) est isomorphe au facteur $W^*(\mathbf{F}_2)$ associé au groupe libre a deux générateurs $\mathbf{F}_2$.

Rappelons que si (M, ϕ) est une $*$-algèbre munie d'une forme linéaire unitale et si $A \subset M$ est une $*$-algèbre unifère, alors un élément $x \in M$ est dit $*$-libre par rapport à A si la $*$-algèbre engendrée par x dans M est libre par rapport à A. On va utiliser le Lemme technique suivant.

Lemme 8 *Soit (M, ϕ) une $*$-algèbre munie d'une trace, $1 \in A \subset M$ une sous-$*$-algèbre, $d \in A$ un unitaire tel que $\phi(d) = \phi(d^*) = 0$ et $u \in M$ un Haar-unitaire $*$-libre par rapport à A. Alors ud est un Haar-unitaire $*$-libre par rapport à A.*

Démonstration. ud est clairement un Haar-unitaire. Pour montrer que ud est $*$-libre par rapport à A il suffit de vérifier que si $a_i \in \mathbf{Z}^*$ et $f_i \in A \cap ker(\phi)$ $(1 \leq i \leq n)$, alors $P := (ud)^{a_1} f_1 (ud)^{a_2} f_2 ...$ est dans $ker(\phi)$.

P est un produit de termes de la forme u ou u^* alternant avec des termes de la forme $d, d^*, f_i, df_i, f_i d^*$ ou $df_i d^*$. Remarquons que $\phi(d) = \phi(d^*) = \phi(f_i) = \phi(df_i d^*) = 0$ et que les termes de la forme df_i ou $f_i d^*$ apparaissent dans P entre u et u ou entre u^* et u^*.

On ecrit chaque df_i sous la forme $[\phi(df_i)1] + [df_i - \phi(df_i)1]$ et chaque $f_i d^*$ sous la forme $[\phi(f_i d^*)1] + [f_i d^* - \phi(f_i d^*)]$. En developpant P, on obtient une combinaison linéaire de termes, chaqun étant un produit d'éléments de la forme u^k avec $k \in \mathbf{Z}^*$ alternant avec des éléments de $A \cap ker(\phi)$. Il en résulte que $\phi(P) = 0$. □

Théorème 6 $A_u(I_2)^{"}_{red} = W^*(\mathbf{F}_2)$.

Démonstration. Par le Lemme 7 on a un plongement :

$$A_u(I_2)^{"}_{red} \hookrightarrow L^\infty(\mathbf{T}) * L^\infty(\mathbf{SU}(2))\,, \quad u \mapsto \begin{pmatrix} za & zb \\ -z\bar{b} & z\bar{a} \end{pmatrix}.$$

Notons $d = sgn \circ (a + \overline{a})$, i.e. la composée de $a + \overline{a} : \mathbf{SU}(2) \to \mathbf{R}$ avec la fonction signe $sgn : \mathbf{R} \to \{-1, 0, 1\}$. Alors $d \in L^\infty(\mathbf{SU}(2))$ est un unitaire tel que $d^2 = 1$.

La partie polaire de $za + z\overline{a}$ est zd, donc $zd \in A_u(I_2)^{"}_{red}$. Il en résulte que $dz^* \in A_u(I_2)^{"}_{red}$, et en multipliant a gauche par dz^* les générateurs $za, zb, z\overline{a}, z\overline{b}$ de $A_u(I_2)^{"}_{red}$, on obtient que $A_u(I_2)^{"}_{red}$ est engendrée par zd, da, db, $d\overline{a}$, $d\overline{b}$.

En utilisant le Lemme 8 on obtient que $W^*(da, db, d\overline{a}, d\overline{b})$ et $W^*(zd)$ sont des sous-algèbres abéliennes diffuses libres qui engendrent $A_u(I_2)^{"}_{red}$, ce qui implique $A_u(I_2)^{"}_{red} = W^*(\mathbf{F}_2)$ (voir Th. 2.6.2 de [VDN]). $\square$

Remarque. Soit U_n^{nc} la $\mathbf{C}^*$-algèbre universelle engendrée par les coefficients d'une matrice de taille n unitaire u. En combinant la formule $U_{n,red}^{nc} \otimes M_n = M_n *_{red} C(\mathbf{T})$ de McClanahan [MC1] avec la formule $M_n * W^*(\mathbf{F}_s) = W^*(\mathbf{F}_{n^2 s}) \otimes M_n$ de Dykema [D] on obtient $U_{2,red}^{nc,"} = W^*(\mathbf{F}_4)$.

6 Remarques sur la représentation adjointe

La représentation adjointe d'un groupe discret Γ est un outil important pour traiter plusieurs problèmes liés aux $\mathbf{C}^*$-algèbres $\mathbf{C}^*(\Gamma)$ et $\mathbf{C}^*_{red}(\Gamma)$: moyennabilité de Γ, nucléarité de $\mathbf{C}^*_{red}(\Gamma)$, simplicité de $\mathbf{C}^*_{red}(\Gamma)$ etc. On va se poser les mêmes questions pour les $\mathbf{C}^*$-algèbres $A_u(F)$ et $A_u(F)_{red}$, qui, du point de vue de la dualité de Pontryagin, sont les "$\mathbf{C}^*(\mathbf{F}_n)$ et $\mathbf{C}^*_{red}(\mathbf{F}_n)$ quantiques".

Si G est un groupe quantique compact matriciel *tel que sa mesure de Haar soit une trace*, on peut définir sur G_p les représentations régulières gauche λ et droite ρ par $\lambda(x)(y) = xy$ et $\rho(x)(y) = y\kappa(x)$, et la représentation adjointe comme étant la composée :

$$G_p \xrightarrow{\delta} G_p \otimes_{max} G_p \xrightarrow{\lambda\otimes\rho} B(l^2(G_{red})).$$

Le cas général est plus subtil, et on va utiliser le Théorème suivant de Woronowicz (voir aussi les Rappels 5.1 de [BS]).

Théorème 7 *[Wo2] A tout groupe quantique compact matriciel G on peut associer une (unique) famille de caractères $(f_z)_{z\in C}$ de G_s qui vérifient les formules suivantes :*

(i) $h(ab) = h(b(f_1 * a * f_1))$, pour tous les $a \in G_s$ et $b \in G$.

(ii) $\kappa^2(a) = f_{-1} * a * f_1$, pour tout $a \in G_s$.

(iii) $f_0 = e$ (la coünité de G_s) et $f_{z+t} = f_z * f_t$, pour tous les $z, t \in \mathbf{C}$.

(iv) $f_z * \kappa(a) = \kappa(a * f_{-z})$ *et* $\kappa(a) * f_z = \kappa(f_{-z} * a)$ *pour tous les* $a \in G_s$ *et* $z \in \mathbf{C}$.

De plus, les f_z *sont définis de la manière suivante : si* $u \in \widehat{G}$ *et si* F *est l'unique matrice positive qui entrelace* u *et* $(I \otimes \kappa)(u^*) = (I \otimes \kappa^2)(u)$, *normalisée telle que* $Tr(F) = Tr(F^{-1})$ *(cf. Th. 5.4 de [Wo2]), alors :*

$$(Id \otimes f_z)(u) = F^z.$$

Notations. $\mathcal{L}(G_{red})$ est l'algèbre des opérateurs bornés $G_{red} \to G_{red}$. L'application caractère $\widehat{G} \to G_s$ sera notée χ (voir Rappels B et C).

Corollaire 2 *Soit* G *un groupe quantique compact matriciel et* $a, b, c, d \in \mathbf{C}$.

(i) L'application $x \mapsto f_a * x * f_b$ *est un automorphisme de* G_s. *L'application* $\lambda_{a,b} : G_s \to \mathcal{L}(G_{red})$ *donnée par* $\lambda_{a,b}(x)(y) = (f_a * x * f_b)y$ *est un morphisme de* $\mathbf{C}$*-algèbres unifères.*

(ii) L'application $x \mapsto f_c * \kappa(x) * f_d$ *est un antiautomorphisme de* G_s. *L'application* $\rho_{c,d} : G_s \to \mathcal{L}(G_{red})$ *donnée par* $\rho_{c,d}(x)(y) = y(f_c * \kappa(x) * f_d)$ *est un morphisme de* $\mathbf{C}$*-algèbres unifères.*

(iii) L'application $G_s \xrightarrow{\delta} G_s \otimes G_s \xrightarrow{\lambda_{a,b} \otimes \rho_{c,d}} \mathcal{L}(G_{red})$ *est un morphisme de* $\mathbf{C}$*-algèbres unifères.* $\square$

L'application définie au point (iii) permet d'associer à tous les $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ une application $ad : \widehat{G} \to \mathcal{L}(G_{red})$. L'intérêt du Lemme suivant apparaîtra dans les démonstrations de simplicité, quand on va utiliser plusieures applications ad de ce type.

Lemme 9 *Soit* G *un groupe quantique compact matriciel et* $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. *Soit :*

$$ad = (\lambda_{a,b} \otimes \rho_{c,d}) \circ \delta \circ \chi : \widehat{G} \to \mathcal{L}(G_{red}).$$

Soit $u \in \widehat{G}$ *et soit* F *la matrice définie dans le Théorème 7. Alors :*

(i) $ad(u)(z) = \sum_{i,k} (F^b u F^a)_{ik} z (F^{-c} u^* F^{-d})_{ki}$

(ii) Si $a + c = b + d = 0$, *alors* $ad(u)$ *est une application de la forme* $z \mapsto \sum a_k z a_k^*$ *avec* $a_k \in G_s$ *(somme finie).*

(iii) Si $a = c$, *alors* $ad(u)(1) = K \cdot 1$ *avec* $K \in \mathbf{R}_+^*$.

(iv) Soient $s, t \in \mathbf{R}$ *et supposons que* $t + b - d = 0$ *ou que* $s + a - c + 1 = 0$. *Alors il existe* $M \in \mathbf{R}_+^*$ *tel que* $ad(u)/M$ *préserve tout état* ϕ *de* G_{red} *tel que* $\phi(xy) = \phi(y(f_s * x * f_t))$, $\forall\, x, y \in G_s$.

Démonstration. *(i)* En utilisant le Théorème 7, on a

$$f_a * u_{ij} * f_b = (f_b \otimes Id \otimes f_a)(\sum u_{is} \otimes u_{sk} \otimes u_{kj}) = (F^b u F^a)_{ij}.$$

Par Th. 7 (iv) et en utilisant $(I \otimes \kappa)(u) = u^*$ on obtient

$$f_c * \kappa(u_{ij}) * f_d = \kappa(f_{-d} * u_{ij} * f_{-c}) = (F^{-c} u^* F^{-d})_{ij}.$$

On a donc $(\lambda_{a,b} \otimes \rho_{c,d})(u_{ik} \otimes u_{lj})(z) = (F^b u F^a)_{ik} z (F^{-c} u^* F^{-d})_{lj}$, d'où :

$$(\lambda_{a,b} \otimes \rho_{c,d})\delta(u_{ij})(z) = \sum_k (F^b u F^a)_{ik} z (F^{-c} u^* F^{-d})_{kj}.$$

(ii) On a $(F^{-c} u^* F^{-d})_{ki} = [(F^{-c} u^* F^{-d})^*]^*_{ik} = (F^{-d} u F^{-c})^*_{ik}$ (rappelons que $F > 0$), donc si $a + c = b + d = 0$, alors :

$$ad(u) : z \mapsto \sum_{i,k} (F^b u F^a)_{ik} z (F^b u F^a)^*_{ik}.$$

(iii) Si $a = c$ alors $ad(u)(1) = \sum_{i,k} (F^b u F^a)_{ik} 1 (F^{-a} u^* F^{-d})_{ki} = Tr(F^{b-d}) 1$.

(iv) On a $\phi(ad(u)(z)) = \phi[\sum (f_a * u_{ik} * f_b) z (f_c * \kappa(u_{ki}) * f_d)] = \phi(zM)$, où

$$M := \sum_{i,k} (f_c * \kappa(u_{ki}) * f_d)(f_{s+a} * u_{ik} * f_{t+b}).$$

Si $t + b - d = 0$ alors en utilisant les formules de la démonstration de (i) on a

$$M = \sum_{i,k} (F^{-c} u^* F^{-d})_{ki} (F^{t+b} u F^{s+a})_{ik} = Tr(F^{s+a-c}) > 0.$$

Supposons maintenant que $s + a - c + 1 = 0$. En utilisant le point (ii) du Théorème 7 on a $u_{ik} = f_1 * \kappa^2(u_{ik}) * f_{-1}$. En utilisant cette formule, ainsi que le point (iv) du Théorème 7 et les formules de la démonstration de (i) on obtient

$M = \sum_{i,k} (f_c * \kappa(u_{ki}) * f_d)(f_{s+a+1} * \kappa^2(u_{ik}) * f_{t+b-1}) =$

$= \kappa[\sum_{i,k} (f_{-t-b+1} * \kappa(u_{ik}) * f_{-s-a-1})(f_{-d} * u_{ki} * f_{-c})] =$

$= \kappa[(I \otimes Tr)(F^{t+b-1} u^* F^{s+a+1-c} u F^{-d})] = Tr(F^{t+b-1-d}) > 0.$ □

7 La Propriété de Powers

Soit (A, τ) une $\mathbf{C}^*$-algèbre unifère munie d'une trace fidèle. Haagerup et Zsido ont montré [HZ] que A est simple à trace unique si et seulement si elle a la propriété de Dixmier :

Pour tout $a \in A$, l'enveloppe convexe fermée de $\{uau^* \mid u$ unitaire $\}$ contient un multiple scalaire de 1_A.

La simplicité de $\mathbf{C}^*_{red}(\mathbf{F}_n)$ a été démontrée en [P], et la méthode de Powers a été étendue par de nombreux auteurs aux produits libres [A, MC2] ou aux $\mathbf{C}^*$-algèbres de groupes discrets [H, HS, BCH]. Ces démonstrations de simplicité utilisent des estimations techniques dans $B(l^2(A,\tau))$, qui "bougent" vers 0 tout élément de trace 0, en utilisant des sommes d'automorphismes intérieurs, i.e. qui prouvent la propriété de Dixmier.

Dans le cas des $\mathbf{C}^*$-algèbres réduites de groupes discrets Γ, l'estimation dans $l^2(\Gamma)$ est obtenue en utilisant des propriétés combinatoires, géométriques etc. de Γ. Une d'entre elles est la propriété de Powers, définie dans [H] :

Pour tout ensemble fini $F \subset \Gamma - \{1\}$, il existe des éléments $g_1, g_2, g_3 \in \Gamma$ et une partition $\Gamma = D \coprod E$ telles que $F \cdot D \cap D = \emptyset$ et $g_s \cdot E \cap g_k \cdot E = \emptyset, \forall\, s \neq k$.

On voit facilement que les groupes libres $\mathbf{F}_n$ ont la propriété de Powers. Cette propriété apparait dans beaucoup d'autres contextes - voir [H] - par exemple toute action fortement hyperbolique, minimale et fortement fidèle de Γ sur un espace de Hausdorff fournit une partition $\Gamma = D \coprod E$ et des (en fait, une infinité de) éléments g_i comme en haut. La preuve de la simplicité de $\mathbf{C}^*_{red}(\Gamma)$ de [HS] a deux étapes :

I. Si $x \in l^2(F)$ est hermitien de trace 0, alors $\| 1/3 \sum u_{g_s} x u_{g_s}^* \| \leq 0.98 \| x \|$.

II. $\mathbf{C}^*_{red}(\Gamma)$ a la propriété de Dixmier, donc est simple à trace unique.

On va étendre cette démonstration aux groupes quantiques compacts "de Powers" :

Définition 3 *Soit G un groupe quantique compact. On munit l'ensemble $P(\widehat{G})$ des parties de $\widehat{G}$ avec l'involution $\overline{A} = \{\overline{a} \mid a \in A\}$ et la multiplication $\circ$ définie par :*

$$A \circ B = \{r \in \widehat{G} \mid \exists\, a \in A, \exists\, b \in B \ \text{ avec } \ r \subset a \otimes b\}.$$

On dira que G a la propriété de Powers si pour toute partie finie $F \subset \widehat{G} - \{1\}$, il existe des éléments $r_1, r_2, r_3 \in \widehat{G}$ et une partition $\widehat{G} = D \coprod E$ telles que $F \circ D \cap D = \emptyset$ et $r_s \circ E \cap r_k \circ E = \emptyset$, $\forall\, s \neq k$.

Le but de cette dernière partie du papier est de montrer que les algèbres $A_u(F)_{red}$ sont simples (et avec au plus une trace). En principe on doit résoudre trois questions :

a) Etendre la démonstration de simplicité de [HS] aux groupes quantiques compacts de Powers ayant une mesure de Haar traciale.

b) Etendre *a)* aux groupes quantiques compacts de Powers quelconques.

c) Etendre *b)* à $A_u(F)$, qui n'a pas la Propriété de Powers - le Théorème 1 montre que la partie $F = \{r_{\alpha\beta}, r_{\beta\alpha}\}$ a la propriété $r_x \in F \circ \{r_x\}$, pour toute $1 \neq r_x \in \widehat{A_u(F)}$.

En fait, toutes les démonstrations de simplicité et de non-existence d'états KMS qu'on va donner seront basées sur la même estimation (Prop. 8). Remarquons que :

- si la mesure de Haar de G est une trace, l'énoncé de la Prop. 8 se simplifie considèrablement. De même pour sa démonstration - on ne doit pas utiliser la 6^{eme} section.

- si de plus $G = C^*_{red}(\Gamma)$ (e.g. $C^*_{red}(\mathbf{F}_2)$), alors la Proposition 8 est le lemme technique de [HS], mais l'estimation qu'on obtient ici est plus forte

$$\| \frac{1}{3} \sum_{s=1,2,3} u_{g_s} x u_{g_s}^* \| \leq \frac{2\sqrt{2}}{3} \| x \| .$$

Notons que les méthodes qu'on developpe ici n'ont aucune chance de s'appliquer à $A_o(F)$, car $A_o(F)_{central}$ est commutative.

Notation. Pour tout $x \in G_s$ on note $supp(x) \subset P(\widehat{G})$ l'ensemble des représentations irréductibles qui ont des coefficients qui apparaissent dans x (rappelons que l'espace des coefficients de $r \in B(H_r) \otimes G_s$ est $G(r) := \{(\phi \otimes Id)(r) \mid \phi \in B(H_r)^*\}$; par [Wo2] on a $G_s = \oplus_{r \in \widehat{G}} G(r)$).

Proposition 8 *Soit (G, u) un groupe quantique compact matriciel réduit et soient $s, t \in \mathbf{R}$. Soit $\widehat{G} = D \coprod E$ une partition et $r_1, r_2, r_3 \in \widehat{G}$ telles que $r_l \circ E \cap r_k \circ E = \emptyset$, $\forall\, l \neq k$.*

Alors il existe une application linéaire unitale $T : G \to G$ telle que :

(a) il existe une famille finie $\{a_i\}$ d'éléments de G_s tels que $T : z \mapsto \sum a_i z a_i^*$.

(b) T préserve les états $\phi \in G^*_{red}$ vérifiant $\phi(xy) = \phi(y(f_s * x * f_t))$, $\forall\, x, y \in G_s$.

(c) pour tout $z = z^* \in G_s$ tel que $supp(z) \circ D \cap D = \emptyset$, on a $\| T(z) \| \leq 0.95 \| z \|$ et $supp(T(z)) \subset \cup_i r_i \circ supp(z) \circ \overline{r_i}$.

Démonstration. Le Lemme 9 appliqué avec $a = c = 0$ et $d = -b = t/2$ fournit une certaine application $ad : \widehat{G} \to \mathcal{L}(G)$ (rappelons que $G_{red} = G$). Notons que le choix de a, b, c, d implique $a + c = b + d = 0$, $a = c$ et $t + b - d = 0$, donc on peut appliquer les points (ii-iv) du Lemme 9 avec $u := r_i$, pour $i = 1, 2, 3$. On obtient trois familles finies $\{a_{i,k}\}_k$ d'éléments de G_s et six réels positifs non nuls K_i, M_i $(i = 1, 2, 3)$ tels que pour tout i :

(i) $ad(r_i)(z) = \sum_k a_{i,k} z a_{i,k}^*$.

(ii) $ad(r_i)(1) = K_i \cdot 1$.

(iii) $ad(r_i)/M_i$ préserve ϕ.

Comme $\phi(ad(r_i)(1)) = M_i$ (par (iii)) et $\phi(ad(r_i)(1)) = K_i$ (par (ii)), on a $K_i = M_i$ pour tout i. Posons

$$T := \frac{1}{3}\left(\frac{ad(r_1)}{M_1} + \frac{ad(r_2)}{M_2} + \frac{ad(r_3)}{M_3}\right).$$

Il nous reste à vérifier la condition (c).

Notons h la mesure de Haar de G (qui est fidèle par hypothèse) et (H, π) la construction GNS associée à (G, h). Pour $i = 1, 2, 3$ notons :

$$T_i' : B(H) \to B(H),\ P \mapsto M_i^{-1} \sum_k \pi(a_{i,k}) P \pi(a_{i,k}^*).$$

Soit $T' = (T_1' + T_2' + T_3')/3$. C'est une application complètement positive unitale. Soit p (resp. q) la projection dans H sur la fermeture de l'espace linéaire engendré par les coefficients des représentations de D (resp. E). On a $\widehat{G} = D \coprod E$ et $supp(z) \circ D \cap D = \emptyset$, d'où :

$$p + q = 1\ ,\ p\pi(z)p = 0.$$

Si $t \neq s \in \{1, 2, 3\}$, alors $\overline{r_t} \circ r_s \circ E \cap E = \emptyset$: en effet, si $r, p \in E$ sont telles que $r \subset \overline{r_t} \otimes r_s \otimes p$, alors on a $h(\chi(\overline{r_t \otimes r} \otimes r_s \otimes p)) \geq 1$, donc $r_t \otimes r$ et $r_s \otimes p$ ont une composante irréductible commune, qui doit être dans $r_s \circ E \cap r_t \circ E = \emptyset$, contradiction (cf. Rappel C). Il en résulte que si a (resp. b) sont des coefficients arbitraires de r_t (resp. r_s), alors $q\pi(a^* b)q = 0$. Les $a_{i,k}$ étant des coefficients de r_i pour tout i (cf. Lemme 9 (i)), on a :

$$T_t'(q)\, T_s'(q) = (M_t M_s)^{-1} \sum_{k,h} \pi(a_{t,k}) q \pi(a_{t,k}^* a_{s,h}) q \pi(a_{s,h}^*) = 0.$$

Il en résulte que la norme de $T'(q)$ est

$$\| T'(q) \| = lim \| T'(q)^n \|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} lim \| (\sum_i T_i'(q))^n \|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} lim \| \sum_i (T_i'(q))^n \|^{\frac{1}{n}}$$

donc plus petite que $\frac{1}{3}$ (car les $(T_i')^n$ sont des applications complètement positives unitales). L'assertion de (c) sur $supp(T(z))$ est évidente. L'inégalité $\| T(z) \| \leq 0.95 \| z \|$ résulte du lemme suivant (avec $f = T'$, $x = \pi(z)$ et $\delta = 1/3$) et du fait que la représentation GNS π est isometrique :

Lemme 10 *Soit H un espace de Hilbert, $x = x^* \in B(H)$, $p + q = 1$ projections dans H, et $f : B(H) \to B(H)$ une application complètement positive unitale. Si $pxp = 0$ et $\| f(q) \| \leq \delta < 1/2$, alors $\| f(x) \| \leq 2\sqrt{\delta - \delta^2} \| x \|$.*

Démonstration (G. Skandalis). Soit $\zeta \in H$ arbitraire de norme un. On veut montrer que $| < f(x)\zeta, \zeta > | \leq 2\sqrt{\delta - \delta^2} \| x \|$. Par le théorème de Stinespring on peut supposer que $f(z) = \omega^* z \omega$ avec $\omega^* \omega = 1$. En posant $\xi = \omega\zeta$, il suffit de démontrer l'énoncé suivant :

Si H est un espace de Hilbert, $x = x^* \in B(H)$, $p + q = 1$ sont des projections dans H avec $pxp = 0$, et $\xi \in H$ est de norme 1 et tel que $< q\xi, \xi > \leq \delta < 1/2$, alors $| < x\xi, \xi > | \leq 2\sqrt{\delta - \delta^2} \| x \|$.

Notons $E \in B(H)$ la projection sur $\mathbf{C}p\xi \oplus \mathbf{C}q\xi$. Alors on peut remplacer dans l'énoncé ci-dessus H, p, q, x, ξ par $E(H), EpE, EqE, ExE, \xi$. En effet, on a $< q\xi, \xi > = < EqE\xi, \xi >$, $< x\xi, \xi > = < ExE\xi, \xi >$ et $\| ExE \| \leq \| x \|$. On peut aussi supposer que $\| x \| = 1$.

Soient donc $H = \mathbf{C}^2$, $p = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & 0 \end{pmatrix}$ et $\xi = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbf{R}$ et $b, m, n \in \mathbf{C}$. On a :

$$< x\xi, \xi > = < \begin{pmatrix} am + bn \\ \bar{b}m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} > = a \mid m \mid^2 + 2Re(b\, n\, \overline{m}).$$

On a $\mid m \mid^2 = < q\xi, \xi > \leq \delta$ et $\mid m \mid^2 + \mid n \mid^2 = \| \xi \|^2 = 1$, donc :

$$| < x\xi, \xi > | \leq \delta \mid a \mid + 2\sqrt{\delta(1-\delta)} \mid b \mid .$$

On peut supposer que $a \geq 0$. Les racines de $det(x - zI) = z^2 - az - \mid b \mid^2$ sont $(a \pm \sqrt{a^2 + 4 \mid b \mid^2})/2$. Mais $\| x \| = 1$, donc ces racines sont dans $[-1, 1]$, ce qui implique que $\sqrt{a^2+4\mid b\mid^2}\leq 2-a$, d'où $a\leq 1-\mid b\mid^2$. On a donc :

$$\mid < x\xi,\xi > \mid \leq \delta(1-\mid b\mid^2)+2\sqrt{\delta(1-\delta)}\mid b\mid = 1-(\sqrt{1-\delta}-\sqrt{\delta}\mid b\mid)^2.$$

On a $\delta < 1/2$, donc la fonction $b\mapsto 1-(\sqrt{1-\delta}-\sqrt{\delta}\mid b\mid)^2$ atteint son maximum sur $[-1,1]$ en $b=\pm 1$. Ce maximum est $2\sqrt{\delta-\delta^2}$. □

Enfin, on utilisera le lemme suivant au lieu de la propriété de Dixmier :

Lemme 11 *Soit (A,ϕ) une $\mathbf{C}^*$-algèbre munie d'un état fidèle, soit $\psi\in A^*$ un état, soit $A_s\subset A$ une $*$-algèbre dense et soit $0<\delta<1$. Supposons que pour tout hermitien $x\in ker(\phi)\cap A_s$ il existe une famille finie d'éléments $a_i\in A$ telle que l'application $z\mapsto\sum a_iza_i^*$ soit unitale, préserve ϕ et ψ et envoie x sur un élément de norme $\leq\delta\parallel x\parallel$. Alors A est simple et $\psi=\phi$.*

Démonstration. On peut supposer $A_s=A$. En appliquant plusieures fois l'hypothèse, on peut supposer que $\delta>0$ est aussi petit que l'on veut.

Soit $J\subset A$ un idéal bilatère. Soit $y\in J$ et $z=yy^*/\phi(yy^*)$. Alors on peut trouver des a_i avec $\parallel\Sigma a_i(1-z)a_i^*\parallel<1$, i.e. avec $\Sigma a_iza_i^*$ inversible. Mais $\Sigma a_iza_i^*\in J$, donc $J=A$.

Soit $x=x^*\in ker(\phi)$ quelconque et $\epsilon>0$ petit. On peut trouver un $y=\Sigma a_ixa_i^*$ de norme plus petite que ϵ, donc $\mid\psi(x)\mid=\mid\psi(y)\mid\leq\epsilon$. On obtient $\psi(x)=0$, donc que $\psi=\phi$ sur les éléments hermitiens. Tout opérateur étant une combinaison linéaire finie de 1 et de hermitiens de $ker(\phi)$, on a $\psi=\phi$. □

Proposition 9 *Si G à la propriété de Powers alors G_{red} est simple.*

Supposons de plus qu'on se donne un état ψ de G_{red} tel que $\forall\, x,y\in G_s$ on ait $\psi(xy)=\psi(y(f_1*x*f_1))$. Alors $\psi=h$ (la mesure de Haar de G_{red}).

Donc si h est une trace, alors elle est la trace unique de G_{red}.

Démonstration. Soit $x\in ker(h)\cap G_s$ un hermitien.

Remarquons que 1 n'est pas dans $F:=supp(x)$. G ayant la propriété de Powers, on peut appliquer la Proposition 8 avec $s=t=1$. On obtient donc une application unitale f de la forme $z\mapsto\sum a_iza_i^*$ qui laisse invariantes h et ψ (par le point (b) de la Prop. 8), telle que $\parallel f(x)\parallel\leq 0.95\parallel x\parallel$ (normes de G_{red}). On conclut à l'aide du Lemme 11 (avec $A=G_{red}$, $A_s=G_s$ et $\phi=h$). □

8 Simplicité de $A_u(F)_{red}$

$A_u(F)_{red}$ n'a pas la propriété de Powers (prendre $F = \{r_{\alpha\beta}, r_{\beta\alpha}\}$), mais on va montrer qu'elle est simple en utilisant la Proposition 8. On identifie les objets définis dans la section précédente pour $G = A_u(F)$. En utilisant la déscription des représentations de $A_u(F)$, on peut identifier $\widehat{A_u(F)} = \mathbf{N} * \mathbf{N}$. La multiplication $\circ$ sur $P(\mathbf{N} * \mathbf{N})$ est donnée (pour $x, y \in \mathbf{N} * \mathbf{N}$) par la formule suivante :

$$\{x\} \circ \{y\} = \{ab \mid \exists\, g \in \mathbf{N} * \mathbf{N} \;\; avec \;\; x = ag,\, y = \overline{g}b\}.$$

Notation. Pour $w \in \mathbf{N} * \mathbf{N}$ on note $\{w...\}$ (resp. $\{...w\}$) l'ensemble des mots de $\mathbf{N} * \mathbf{N}$ qui commencent (resp. finissent) avec w. Pour $w, y \in \mathbf{N} * \mathbf{N}$ on note $\{w...y\} = \{w...\} \cap \{...y\}$. On note $(\beta\alpha)^N$ le mot $\beta\alpha\beta\alpha...\beta\alpha$ (N fois).

Lemme 12 *On considère les ensembles $D = \{\alpha...\}$, $E = \{\beta...\} \cup \{e\}$, $F = \{\beta...\alpha\}$ et les éléments $r_1 = \beta\alpha\beta$, $r_2 = \beta\alpha^2\beta$ et $r_3 = \beta\alpha^3\beta$. Alors $\mathbf{N} * \mathbf{N} = D \coprod E$ est une partition, $F \circ D \cap D = \emptyset$ et $r_s \circ E \cap r_k \circ E = \emptyset$, $\forall\, s \neq k$.* $\square$

Notation. On fixe $n \in \mathbf{N}$, $F \in \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$ et on note $G = A_u(F)_{red}$ et h sa mesure de Haar.

Corollaire 3 *Soient $s, t \in \mathbf{R}$ et $\epsilon > 0$. Soit ψ un état de G tel que $\psi(xy) = \psi(y(f_s * x * f_t))$, $\forall\, x, y \in G_s$.*

Alors il existe une application linéaire unitale $V : G \to G$ de la forme $z \mapsto \sum a_i z a_i^*$ (somme finie, avec $a_i \in G_s$) qui préserve ψ telle que pour tout $x = x^* \in A_u(F)_s$ avec supp$(x) \subset \{\beta...\alpha\}$ on a $\| V(x) \| \leq \epsilon \| x \|$ et supp$(V(x)) \subset \{\beta...\alpha\}$.

Démonstration. On applique la Proposition 8 aux parties définies dans le Lemme 12. On obtient ainsi une certaine application $T : G \to G$ de la forme $z \mapsto \sum b_i z b_i^*$ (somme finie, avec $b_i \in G_s$) qui préserve ψ. En posant $z = x$ dans le point (c) de la Prop. 8 on obtient

$$\| T(x) \| \leq 0.95 \| x \|,$$

$$supp(T(x)) \subset \cup_i r_i \circ supp(x) \circ \overline{r_i} \subset \{\beta...\beta\} \circ \{\beta...\alpha\} \circ \{\alpha...\alpha\} \subset \{\beta...\alpha\}.$$

La condition (a) de la Prop. 8 implique que $T(x) = T(x)^* \in G_s$, donc on peut appliquer le point (c) de la Prop. 8 avec $z = T(x)$, puis avec $z = T^2(x)$ etc. On choisit $m \in \mathbf{N}$ tel que $0.95^m \leq \epsilon$ et on pose $V = T^m$. $\square$

Lemme 13 *$\forall F \subset \mathbf{N} * \mathbf{N}$ finie, $(\beta\alpha)^N \circ F \circ (\beta\alpha)^N \subset \{\beta...\alpha\} \cup \{e\}$ pour N grand.*

Démonstration. Si $Y \subset \mathbf{N} * \mathbf{N}$ est l'ensemble des mots alternés (i.e. qui ne contiennent ni α^2 ni β^2), on voit facilement que

(a) $Y \circ \{...\alpha\} \cap \{...\beta\} = \emptyset$; (b) $Y \circ \{...\beta\} \cap \{...\alpha\} = \emptyset$
(c) $\{\alpha...\} \circ Y \cap \{\beta...\} = \emptyset$; (d) $\{\beta...\} \circ Y \cap \{\alpha...\} = \emptyset$.

Il suffit démontrer le Lemme pour les parties de cardinal 1. Soit $F = \{z\}$ une telle partie.

• Supposons $z \in Y$. Par (d), $(\beta\alpha)^N \circ z$ est égal à e (et dans ce cas on a fini), ou commence par β. En utilisant encore une fois (d) on voit que $(\beta\alpha)^N \circ z \circ (\beta\alpha)^N$ est égal à e ou commence par β. De même, en appliquant deux fois (a), on voit que $(\beta\alpha)^N \circ z \circ (\beta\alpha)^N$ est égal à e ou finit par α. Donc $(\beta\alpha)^N \circ z \circ (\beta\alpha)^N$ est dans $\{\beta...\alpha\} \cup \{e\}$.

• Supposons $z \in \mathbf{N}*\mathbf{N}-Y$, par exemple que $z = x\alpha^2 y$. Alors $(\beta\alpha)^N \circ x\alpha \subset \{...\alpha\} \cup \{e\}$ par (a). Pour $N \geq l(x)$, il est clair que $(\beta\alpha)^N \circ x\alpha \subset \{\beta...\alpha\}$. Par les mêmes arguments, $\alpha y \circ (\beta\alpha)^N \subset \{\alpha...\alpha\}$ pour $N \geq l(y)$. Donc pour N grand :

$$(\beta\alpha)^N \circ (x\alpha^2 y) \circ (\beta\alpha)^N = [(\beta\alpha)^N \circ x\alpha] \circ [\alpha y \circ (\beta\alpha)^N] \subset \{\beta...\alpha\}. \qquad \square$$

Corollaire 4 *Soit $x = x^* \in G_s$ tel que $h(x) = 0$.*

(i) Il existe une application linéaire unitale $W : G \to G$ de la forme $z \mapsto \sum b_i z b_i^*$ (somme finie, avec $b_i \in G_s$), qui préserve h et telle que supp$(W(x)) \subset \{\beta...\alpha\}$.

(ii) Soient $v, w \in \mathbf{R}$. Alors il existe $L \in \mathbf{R}_+^*$ et une application linéaire $U : G \to G$ de la forme $z \mapsto \sum c_i z c_i^*$ (somme finie, avec $c_i \in G_s$), qui préserve h, telle que supp$(U(x)) \subset \{\beta...\alpha\}$ et telle que U/L préserve tout état ψ de G vérifiant $\psi(pq) = \psi(q(f_v * p * f_w))$, $\forall\, p, q \in G_s$.

Démonstration. Fixons $K \in \mathbf{N}$ tel que $(\beta\alpha)^K \circ supp(x) \circ (\beta\alpha)^K \subset \{\beta...\alpha\} \cup \{e\}$ (cf. Lemme 13). Notons $r = r_{(\beta\alpha)^K}$.

(i) Le Lemme 9 appliqué avec $a = c = 0$ et $d = -b = 1/2$ fournit une certaine application $ad : \widehat{G} \to \mathcal{L}(G)$. Remarquons que le choix de a, b, c, d permet d'appliquer (avec $u := r$) les points (ii) et (iii) du Lemme 9, ainsi que le point (iv) avec $s = t = 1$ et $\phi = h$. On obtient deux réels positifs non-nuls K, M, qui sont évidemment égaux.

En posant $W = ad(r)/M$, il nous reste à vérifier que $supp(W(x)) \subset \{\beta...\alpha\}$. En utilisant $r \circ supp(x) \circ r \subset \{\beta...\alpha\} \cup \{e\}$ et la formule de ad (Lemme 9 (i)), ainsi que l'égalité $\overline{r} = r$ on obtient $supp(W(x)) \subset \{\beta...\alpha\} \cup \{e\}$. Mais $h(W(x)) = h(x) = 0$, donc e n'est pas dans $supp(W(x))$.

(ii) Le Lemme 9 appliqué avec $c = -a = (v+1)/2$ et $d = -b = 1/2$ fournit une certaine application $ad : \widehat{G} \to \mathcal{L}(G)$. On peut appliquer (avec $u := r$) le point (ii) du Lemme 9, ainsi que le point (iv) avec $s = t = 1$ et $\phi = h$. On obtient ainsi un $M \in \mathbf{R}_+^*$ tel que si on note $U = ad(r)/M$, alors U est de la forme $z \mapsto \sum c_i z c_i^*$ et préserve h.

Appliquons de nouveau le point (iv) du Lemme 9, pour les mêmes a, b, c, d, mais avec $s = v$, $t = w$ et $\phi = \psi$ cette fois-ci. On obtient un $M_1 \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $ad(r)/M_1$ préserve ψ. On pose alors $L = M_1/M$.

Enfin, l'assertion sur $supp(U(x))$ se démontre comme au point (i). $\square$

Démonstration du théorème 3. Rappelons qu'on a fixé $n \in \mathbf{N}$ et $F \in \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$ et on a noté $G = A_u(F)_{red}$. *Soit* $x = x^* \in G_s$ *arbitraire tel que* $h(x) = 0$ *et soit* $\epsilon_1 > 0$ *arbitraire.*

I) En appliquant le Corollaire 4 (i) avec le x ci-dessus on obtient une certaine application $W : G \to G$. En appliquant le Corollaire 3 avec $s = \beta = 1$, $\psi := h$ et $\epsilon := \epsilon_1$ on obtient une certaine application $V : G \to G$. Remarquons que l'application VW a les propriétés suivantes :

- VW est unitale de la forme $z \mapsto \sum_s a_s z a_s^*$ (somme finie).
- VW préserve h.
- $\| (VW)(x) \| \leq \epsilon_1 \| x \|$.

Le Lemme 11 (avec $A = G$, $A_s = G_s$ et $\psi = \phi = h$) montre alors que G est simple.

II) Soient $s, t \in \mathbf{R}$ et ϕ un état de G vérifiant $\phi(pq) = \phi(q(f_s * p * f_t))$, $\forall\, p, q \in G_s$. En appliquant le Corollaire 4 (ii) avec $v = s$, $w = t$ et $\psi = \phi$ on obtient une application $U : G \to G$ et un $L \in \mathbf{R}_+^*$. En appliquant le Corollaire 3 avec $\psi = \phi$ et avec un $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon \| U(x) \| < L\epsilon_1$ on obtient une certaine application $V : G \to G$. Remarquons que l'application VU/L a les propriétés suivantes :

(a) VU/L préserve ϕ.

(b) $\| (VU/L)(x) \| \leq \epsilon L^{-1} \| U(x) \| \leq \epsilon_1$.

En utilisant (a) et en faisant $\epsilon_1 \to 0$ dans (b) on obtient $\phi(x) = 0$. Donc $\phi = h$ sur les éléments hermitiens, d'où $\phi = h$.

III) Enfin, par le Théorème 7, la mesure de Haar de $A_u(F)$ est une trace si et seulement si $FF^* \in \mathbf{C}1$. $\square$

Proposition 10 *Soit (G,u) un groupe quantique compact tel que sa mesure de Haar soit une trace. Alors (G,u) est moyennable si et seulement si G_{red} est nucléaire.*

Démonstration. Notons J le noyau de la projection $\pi : G_p \to G_{red}$. On analyse les extensions à G_p et G_{red} des applications $\lambda \otimes \rho$, δ, e définies sur G_s :

• La représentation gauche-droite $\lambda \otimes \rho : G_s \otimes G_s \to B(l^2(G_{red}))$ est un $*$-morphisme, qui s'étend donc en une application $(\lambda \otimes \rho)_p : G_p \otimes_{max} G_p \to B(l^2(G_{red}))$ (voir 6^{eme} section). Le noyau de la projection $\pi \otimes I : G_p \otimes_{max} G_p \to G_{red} \otimes_{max} G_p$ étant $J \otimes_{max} G_p$ (voir [Wa]), on voit que $(\lambda \otimes \rho)_p$ se factorise par $\pi \otimes I$ en une application $(\lambda \otimes \rho)_r : G_{red} \otimes_{max} G_p \to B(l^2(G_{red}))$.

• La comultiplication $\delta : G_s \to G_s \otimes G_s$ est un $*$-morphisme qui s'étend à G_p en une application $\delta_p : G_p \to G_p \otimes_{max} G_p$. En composant avec la projection $G_p \otimes_{max} G_p \to G_{red} \otimes_{max} G_p$ on obtient une application $\delta_1 : G_p \to G_{red} \otimes_{max} G_p$.

• La comultiplication $\delta_r : G_{red} \to G_{red} \otimes_{min} G_{red}$ se relève en une application $\delta_2 : G_{red} \to G_{red} \otimes_{min} G_p$ (voir Corollaire A.6 de [BS]).

• La coünité $e : G_s \to \mathbf{C}$ s'étend en une application $e_p : G_p \to \mathbf{C}$.

En notant $\tau : T \mapsto < T1, 1 >$ l'état canonique de $B(l^2(G_{red}))$, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
G_{red} & \xleftarrow{\pi} & G_p & \xrightarrow{e_p} & \mathbf{C} \\
\delta_2 \downarrow & & \delta_1 \downarrow & & \uparrow \tau \\
G_{red} \otimes_{min} G_p & \longleftarrow & G_{red} \otimes_{max} G_p & \xrightarrow{(\lambda\otimes\rho)_r} & B(l^2(G_{red}))
\end{array}$$

(où la commutation du carré de gauche résulte de la construction de δ_1, δ_2, et celle du carré de droite se vérifie sur les générateurs u_{ij}). Il en résulte que si G_{red} est nucléaire, alors $ker(\pi) \subset ker(e_p)$, donc G est moyennable (cf. Prop. 5.5 de [Bl]). Pour l'autre implication, voir les Remarques A.13 de [BS]. $\square$

Corollaire 5 *$A_u(I_n)_{red}$ n'est pas nucléaire. De même pour $A_o(I_n)_{red}$ si $n \geq 3$.* $\square$

Remarque. La Proposition 6 montre qu'on a $A_u(F) \sim_{sim} A_u(F')$, avec F' diagonale. La propriété universelle de $A_u(F')$ implique l'existence d'une surjection $A_u(F') \to \mathbf{C}^*(\mathbf{F}_n)$, et en composant avec l'application de similarité on obtient une surjection $A_u(F) \to \mathbf{C}^*(\mathbf{F}_n)$. Le noyau de la surjection $A_u(F) \to \mathbf{C}^*(\mathbf{F}_n)$ étant un idéal non-trivial de $A_u(F)$, on a $A_u(F) \neq A_u(F)_{red}$.

References

[A] Avitzour, D.: Free products of C^*-algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 271, 423-465 (1982)

[BS] Baaj, S., Skandalis, G.: Unitaires multiplicatifs et dualité pour les produits croisés de C^*-algèbres. Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 4^{eme} serie, t.26, 425-488 (1993)

[B1] Banica, T.: On the polar decomposition of circular variables. Int. Eq. and Op. Th. 24, 372-377 (1996)

[B2] Banica, T.: Théorie des représentations du groupe quantique compact libre $O(n)$. C. R. Acad. Sci. Paris 322, 241-244 (1996)

[BCH] Bekka, M., Cowling, M., de la Harpe, P.: Some groups whose reduced C^*-algebra is simple. Publ. Math. IHES 80, 117-134 (1995)

[Bl] Blanchard, E.: Déformations de C^*-algèbres de Hopf. Bull. Soc. Math. Fr. 124, 141-215 (1996)

[D] Dykema, K.: On certain free product factors via an extended matrix model. J. Funct. Anal. 112, 31-60 (1993)

[HZ] Haagerup, U., Zsido, L.: Sur la propriété de Dixmier pour les C^*-algèbres. C. R. Acad. Sci. Paris 298, 173-176 (1984)

[H] de la Harpe, P.: Reduced C^*-algebras of discrete groups which are simple with unique trace. Lect. Notes Math. 1132, 230-253, Springer (1985)

[HS] de la Harpe, P., Skandalis, G.: Powers' property and simple C^*-algebras. Math. Ann. 273, 241-250 (1986)

[J] Jones, V.F.R.: Index for subfactors. Invent. Math. 72, 1-25 (1983)

[MC1] McClanahan, K.: C^*-algebras generated by elements of a unitary matrix. J. Funct. Anal. 107, 439-457 (1992)

[MC2] McClanahan, K.: Simplicity of reduced amalgamated free products of C^*-algebras. Canad. J. Math. 46, 793-807 (1994)

[N] Nagy, G.: On the Haar measure of the quantum $SU(N)$ group. Comm. Math. Phys. 153, 217-228 (1993)

[NS] Nica, A., Speicher, R.: R-diagonal pairs - a common approach to Haar unitaries and circular elements. preprint (1995)

[P] Powers, R.: Simplicity of the C^*-algebra associated with the free group on two generators. Duke Math. J. 42, 151-156 (1975)

[R1] Rosso, M.: Finite dimensional representations of the quantum analog of the enveloping algebra of a complex semisimple Lie algebra. Comm. Math. Phys. 117, 581-593 (1988)

[R2] Rosso, M.: Algèbres enveloppantes quantifiées, groupes quantiques compacts de matrices et calcul differentiel non-commutatif. Duke Math. J. 61, 11-40 (1990)

[VDW] Van Daele, A., Wang, S.Z.: Universal quantum groups. International J. of Math. Vol. 7, No. 2, 255-264 (1996)

[V] Voiculescu, D.: Circular and semicircular systems and free product factors. Progress in Math. 92, 45-60, Birkhäuser (1990)

[VDN] Voiculescu, D., Dykema, K., Nica, A.: Free random variables. CRM Monograph Series $n^\circ 1$, AMS (1993)

[W1] Wang, S.Z.: General constructions of compact quantum groups. Ph. D. Thesis, Berkeley (1993)

[W2] Wang, S.Z.: Free products of compact quantum groups. Comm. Math. Phys. 167, 671-692 (1995)

[Wa] Wassermann, S.: Exact C^*-algebras and related topics. Lecture Notes Series n^o 19, Seoul National Univ. (1994)

[Wo1] Woronowicz, S.L.: Twisted $SU(2)$ group. An example of a non-commutative differential calculus. Publ. RIMS Kyoto 23, 117-181 (1987)

[Wo2] Woronowicz, S.L.: Compact matrix pseudogroups. Comm. Math. Phys. 111, 613-665 (1987)

[Wo3] Woronowicz, S.L.: Tannaka-Krein duality for compact matrix pseudogroups. Twisted $SU(n)$ groups. Invent. Math. 93, 35-76 (1988)

[Wo4] Woronowicz, S.L.: A remark on compact matrix quantum groups. Lett. Math. Phys. 21, 35-39 (1991)